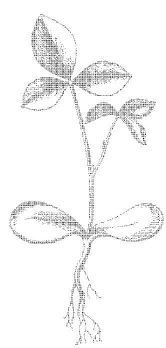
А. Л. БРУДНО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

А. Л. БРУДНО

Теория функций действительного переменного

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

517. 2
Б 89
УДК 517. 51

Теория функций действительного переменного. Б р у д н о А. Л. Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1971.

Книга отличается экономностью изложения и естественностью определений, которые достигаются отделкой доказательств и специальным построением теории. Изложение ведется на конкретном материале и прививает навыки самостоятельного обращения с изучаемыми объектами.

Главы «Теория множеств» и «Действительные числа» могут предшествовать серьезному курсу математического анализа. Дальнейшие главы книги излагают материал, обычно входящий в курс теории функций или «дополнительных глав анализа».

Книга предназначена для студентов и аспирантов математических отделений (университетов, пединститутов и вузов с математическими специальностями).

В книге 13 рисунков.

2-2-3
32-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 4

ГЛАВА 5

ПРЕДИСЛОВИЕ

1. Теория функций действительного переменного (ТФДП) появилась на рубеже 19—20 веков. Она была вызвана потребностью обосновать математический анализ, затем сложилась в самостоятельную дисциплину и наконец, став основой математики в целом, породила несколько разделов математики.

Методы ТФДП своеобразны — они требуют в большей степени умения обращаться с объектами теории, нежели знания результатов, или владения аппаратом. Проще всего такое умение приобретается на конкретном материале. Поэтому ТФДП обладает совершенно исключительной наглядностью, но оставляет обобщения другим разделам математики.

2. Перейдем к отдельным главам, чтобы дать специалисту представление об этой книге.

2.1. Изучение теории множеств не может быть начато слишком рано. И первая глава написана так, чтобы предшествовать курсу анализа (для этого, например, континуум вводится как система подмножеств счетного множества). По нашему опыту теория множеств развивает математическую культуру учащегося более иных дисциплин, а затраченное время с лихвой окупается при прохождении курса анализа.

Другое отличие нашего изложения состоит здесь в систематическом использовании арифметики мощностей.

2.2. В построении действительных чисел мы стремились к наглядности, и поэтому ввели числа как десятичные дроби. При этом мы выполнили программу, намеченную Лебегом и частично развитую Валле-Пуссеном. На этом пути легко установить существование граней и определить арифметические действия. Что касается доказательства алгебраических тождеств (например, дистрибутивности), то, выбирая между аксиоматическим построением действительных чисел (когда эти тождества постулируются) и нудной проверкой этих свойств, мы предпочли перечислить алгебраические свойства в качестве недоказанных теорем. Учащемуся представляется возможность либо самостоятельно доказать эти тождества, либо вернуться к ним после теории пределов и непрерывных функций (не пользующихся ими) и найти в приложении ко 2-й главе естественные доказательства.

2.3. При построении меры Лебега мы стремились к экономности изложения и предпослали определению Лебега определение Каратеодори. На этом пути легко получается измеримость объединения (измеримых множеств) и осуществляется возврат к определению измеримости, данному самим Лебегом. Рукопись первой части 3-й главы прочел М. Я. Вайнштейн. Его советы я с благодарностью выполнил.

Во второй части 3-й главы содержится доказательство теоремы о точках плотности (и точках внешней плотности неизмеримых множеств).

2.4. Во второй части главы 4 мы излагаем асимптотическую непрерывность, не опираясь на понятие интеграла.

В третьей части этой главы теорема Данжуа доказывается без предположения о измеримости функций, поскольку такое доказательство оказывается самым простым.

Построением второй части главы 3 и второй и третьей частей главы 4 мы обязаны А. С. Кронроду, который при построении теории функций двух действительных переменных довел доказательства трудных теорем метрической ТФДП до естественных следствий определения меры Лебега.

2.5. Трансфиниты не входят в обязательные курсы ТФДП, но могут пригодиться для студенческих спецкурсов и спецсеминаров. Мы уделили много внимания построению по индукции. Для трансфинитов оно, конечно, не сложнее, чем для натурального ряда. Но и для натурального ряда его редко проводят аккуратно.

3. Я пунктуально переписывал наиболее удачные места из следующих книг:

Ф. Хаусдорф. Теория множеств;

П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию множеств и функций;

П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций;

И. П. Натансон, Введение в теорию функций вещественной переменной;

А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа,

вследствие чего обязан их авторам более, чем это бывает обычно.

Я благодарен Ю. Б. Гермейеру, с которым мы научили друг друга ТФДП, решая задачи в коридорах университета. Значительное влияние на книгу оказали беседы по ТФДП с А. А. Ляпуновым, Н. К. Бари, Д. Е. Меньшовым и П. С. Новиковым. Рецензенту этой книги Л. В. Келдыш я благодарен за ряд замечаний, улучшавших изложение.

Вместе с тем никто из перечисленных здесь лиц не обязан нести ответственности за изложение его мыслей, редакцию цитат и текст, который их окружает.

ГЛАВА 1

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

§ 1. Множества

1. Множество возникает путем объединения отдельных предметов (вещей) в одно целое. Оно есть множественность, мыслимая как единство. Если бы эти или подобные высказывания выставлялись в качестве определений, то можно было бы возразить, что они определяют «то же самое при помощи того же самого» или даже «темное через еще более темное».

Мы примем в качестве основного положения, что вещи a, b, c, ... особым, не подлежащим определению образом, определяют вещь M и что, обратно, вещь M определяет вещи a, b, c, ... Это отношение мы будем выражать словами: множество M состоит из элементов a, b, c, ... Итак, множество задано, если про всякую вещь определено, входит она в это множество или нет.

Примерами множеств могут служить: (1) множество, состоящее из трех элементов: этой страницы, этой книги и прошлогоднего снега; (2) множество наборов из 13 вещей по 7; (3) множество натуральных чисел от 1 до 100; (4) множество атомов водорода в Солнце.

Каждое из этих множеств состоит из некоторого натурального (т. е. целого положительного) числа элементов. Хотя в данный момент и при данном состоянии наших знаний нам может быть и неизвестно, каково именно это число. Такие множества называются *конечными*.

Примерами бесконечных (т. е. не конечных) множеств являются:

1) множество всех натуральных чисел;

2) множество всех четных чисел;

3) множество всех кругов на плоскости.

Бессмертная заслуга Г. Кантора (1845—1918) в том, что он отважился вступить в область бесконечного, не побоявшись ни внутренней, ни внешней борьбы не только с мнимыми парадоксами, широко распространенными предрассудками, приговором философов (актуально бесконечное неопределимо), но и с предубеждением, высказанным многими великими математиками. И он стал создателем новой науки — теории множеств (ибо рассмотрение конечных множеств — не что иное, как элементарная арифметика и комбинаторика) — науки, которая в настоящее время составляет основу математики.

2. Отношение между элементом a и множеством A выражают фразой: a является элементом A, или формулой $a \in A$. В противном случае говорят: a не является элементом A, или пишут $a \notin A$.

По определению, два множества равны: $A = B$ (тождественны), тогда и только тогда, когда каждый элемент A является также и элементом B, и обратно. Таким образом множество однозначно определяется своими элементами и не может содержать одинаковых элементов.

Множество обозначают его элементами, заключенными в фигурные скобки, причем невыписанные элементы заменяют точками. Так,

$$A = \{a\}, \quad A = \{a, b\}, \quad A = \{a, s, k\}$$

суть множества, соответственно состоящие из одного элемента a, двух элементов a и b, трех элементов a, s, k;

$$A = \{a, b, c, \ldots\}$$

есть множество, состоящее из элементов a, b, c и, может быть, еще некоторых других. Каковы эти другие, обозначенные точками элементы, должно быть, конечно, как-нибудь указано, например:

множество натуральных чисел $\{1, 2, \ldots\}$,
множество натуральных четных чисел $\{2, 4, 6, \ldots\}$,
множество квадратов целых чисел $\{1, 4, 9, \ldots\}$,
множество простых чисел $\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$.

Впрочем, чаще всего запись $A = \{a\}$ показывает, что элементы A будут обозначаться буквой a.

Теоретически надо различать элемент a и множество $\{a\}$, состоящее из единственного элемента a, хотя бы потому, что множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами. Множество $a = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2; но множество $\{a\}$ состоит из одного элемента a.

Для удобства вводится также *пустое* множество θ, которое не содержит элементов. Равенство $A = \theta$ обозначает, что множество A не содержит элемнтов, т. е. что оно — пустое. Если бы мы не ввели пустого множества, нам часто пришлось бы, говоря о каком-нибудь множестве, прибавлять оговорку: если оно существует. Ибо часто элементы множества бывают определены так, что не известно, существуют ли они. Например, не известно, пусто или нет множество натуральных чисел n, для которых уравнение $x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2}$ разрешимо в натуральных числах. Таким образом, введение пустого множества продиктовано целесообразностью (как и числа нуль). Зато теперь, при формулировке некоторых теорем, придется оговаривать, что упоминаемые в них множества не пусты (так же, как это приходится делать для чисел).

Если каждый элемент множества A является элементом множества B:

$$\forall u\,[(u \in A) \Rightarrow (u \in B)],$$

то A называют *подмножеством* B и пишут

$$A \subseteq B \text{ или } B \supseteq A.$$

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то по ранее введенному определению $A = B$. Отметим еще, что подмножествами A являются: само множество A и пустое множество

$$A \subseteq A, \quad \theta \subseteq A.$$

Действительно, для пустого множества соотношение «если $n \in \theta$, то $n \in A$» выполняется само собой, ибо θ не содержит элементов *).

Если $A \subseteq B$, но $A \neq B$, то пишут $A \subset B$ и называют A *строгим* подмножеством B. Отношение $\subseteq$ транзитивно, т. е.,

$$\text{если } A \subseteq B \text{ и } B \subseteq C, \text{ то } A \subseteq C;$$

транзитивны также отношение $\subset$ и отношение $=$.

З а д а ч и. 1) Сколько и каких подмножеств имеет множество $A = \{a, b, c\}$?

---

*) Точнее говоря, это утверждение справедливо потому, что условие $n \in \theta$ никогда не имеет места. Если p и q — два суждения, то утверждение «если p верно, то q верно» (из p следует q) верно всякий раз, когда p неверно. Из неверного суждения следует любое суждение: если $2 \cdot 2 = 5$, то существуют ведьмы.

Ответ. 8, именно:

$$\theta, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

2) Сколько подмножеств имеет множество A, состоящее из n элементов?

Ответ. 2^n. Для доказательства расположим элементы A в каком-нибудь порядке и обозначим $\{a_1, a_2, .., a_n\}$. Рассмотрим, далее, все последовательности l из n нулей и единиц, таких последовательностей будет 2^n *). Каждой последовательности l можно отнести подмножество A, содержащее (не содержащее) элемент a_i, если на i-м месте последовательности l находится 1 (находится 0).

§ 2. Взаимно однозначное соответствие

Понятие взаимно однозначного соответствия, открытое Кантором, является основным инструментом исследования бесконечных множеств.

Говорят, что два множества A и B *можно поставить во взаимно однозначное соответствие*, если можно каждому элементу $a \in A$ поставить в соответствие (один) элемент $b \in B$ таким образом, чтобы *при этом* каждый элемент $b \in B$ соответствовал какому-нибудь элементу $a \in A$ и притом единственному. В этом случае говорят также, что A и B *эквивалентны* или что A и B *имеют одинаковую мощность*, и пишут

$$|A| = |B|.$$

Понятие взаимно однозначного соответствия можно несколько формализовать. Для этого введем понятие *пары* (a, b). Две пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) считаются одинаковыми, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Таким образом, при $a \neq b$ пары (a, b) и (b, a) — различные пары (в отличие от множеств, $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$).

Множества A и B можно поставить во взаимно однозначное соответствие, если существует такое множество $F = \{f\}$ пар $f = (a, b)$, в котором

1) каждая пара $f = (a, b)$ из F имеет левый элемент из A и правый из B;

2) каждый элемент $a \in A$ является левым элементом одной и только одной пары $f \in F$;

3) каждый элемент $b \in B$ является правым элементом одной и только одной пары $f \in F$.

---

*) При $n = 1$ таких последовательностей $2 = 2^1$ (именно: 0 и 1). При возрастании n на единицу число последовательностей удваивается, ибо каждую можно продолжить двумя способами, приписав справа 0 или 1.

Если $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ и $|A| = |B|$, то существует функция $b = \varphi(a)$, которая каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие элемент $b \in B$. Функция φ определена для всех $a \in A$, принимает все значения $b \in B$ и $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$, когда $a_1 \neq a_2$.

Если множества A и B конечны, то равенство $|A| = |B|$ означает, что эти множества состоят из одинакового числа элементов, ибо конечное множество нельзя взаимно однозначно отобразить на его строгое подмножество. Иначе обстоит дело с бесконечными множествами.

Важная задача. $A = \{1, 2, \ldots\}$, $B = \{2, 3, \ldots\}$. Доказать, что $|A| = |B|$.

Решение. Нужное соответствие доставляется множеством пар $F = \{(n, n+1)\}$, со всеми натуральными n. Можно также сказать: поставим в соответствие каждому элементу $n \in A$ элемент $n + 1 \in B$. При этом каждому элементу $k \in B$ будет соответствовать элемент $k - 1 \in A$.

Еще раз подчеркнем: мы говорим, что A и B эквивалентны, если между A и B *можно* установить взаимно однозначное соответствие. И это нисколько не исключает возможности установить между элементами A и B такое соответствие, что элементы A будут исчерпаны, а в B останутся еще свободные.

Задачи. Пусть a и b — две точки на прямой. Интервалом (a, b) (отрезком $[a, b]$) называется множество точек прямой, расположенных между a и b, не включая сами точки a и b (соответственно — включая сами точки a и b). Показать, что:

1) Множество точек отрезка длиной 1 имеет ту же мощность, что и отрезка длиной 2.

2) Если $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$, то

$$|[a_1, b_1]| = |[a_2, b_2]|,$$
$$|(a_1, b_1)| = |(a_2, b_2)|.$$

3) При $a \neq b$ множество (a, b) имеет ту же мощность, что и множество точек всей бесконечной прямой.

4) Пусть $[a, b]$ — отрезок длиной 1. Тогда $|[a, b]| = |(a, b)|$.

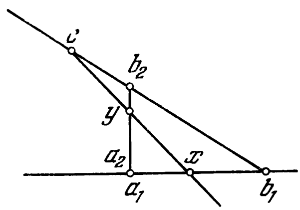


Рис. 1.1.

Решение. Расположим отрезки $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ на плоскости, как указано на рис. 1.1. На прямой $b_1 b_2$ зафиксируем точку c, вне отрезка $[b_1, b_2]$. Точки $x \in [a_1, b_1]$ и $y \in [a_2, b_2]$ будем считать соответственными, если прямая xy проходит через точку c. Таким образом, $|[a_1, b_1]| = |[a_2, b_2]|$. Аналогично решаются и остальные задачи, кроме последней (более трудной).

З а м е ч а н и е. Пару (a, b) при $a \neq b$ можно определить как множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Таким образом, понятие пары сводится к понятию множества.

§ 3. Операции над множествами

Объединением множеств A и B называется множество

$$S = A \cup B \quad (\cup \text{ — знак объединения}),$$

состоящее из элементов s, каждый из которых входит хотя бы в одно из множеств A или B.

Пересечением множеств A и B называется множество

$$D = A \cap B \quad (\cap \text{ — знак пересечения}),$$

состоящее из элементов d, каждый из которых входит в оба множества A и B.

П р и м е р ы. 1) Если A — множество, заштрихованное горизонтально, а B — вертикально, то $A \cup B$ — все заштрихованное множество, а $A \cap B$ — множество, заштрихованное дважды (рис. 1.2).

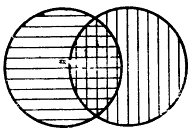


Рис. 1.2.

2) Если A — множество прямоугольников, а B — множество ромбов, то пересечение $A \cap B$ — множество квадратов.

Аналогично определяются объединение и пересечение нескольких множеств

$$S = A \cup B \cup C, \qquad D = A \cap B \cap C.$$

Пусть имеется произвольное множество $I = \{i\}$, и каждому i поставлено в соответствие множество A_i. Тогда объединение

$$S = \bigcup_{i \in I} A_i$$

состоит из элементов s, каждый из которых входит хотя бы в одно из множеств A_i, а пересечение

$$D = \bigcap_{i \in I} A_i$$

— из элементов d, каждый из которых входит во все множества A_i:

$$s \in \bigcup A_i, \quad \text{если} \quad (\exists i \in I)(s \in A_i),$$
$$d \in \bigcap A_i, \quad \text{если} \quad (\forall i \in I)(d \in A_i).$$

Заметьте, что множества A_i не обязательно различны.

Если $A \cap B \neq \theta$, то говорят, что A и B *пересекаются*. В противном случае — не пересекаются.

Упражнение. Проверьте тождества:

$$A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C,$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Докажем для примера последнее тождество. Пусть x входит в левую часть. Тогда

$$x \in A \text{ или } x \in B \cap C.$$

Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если же $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$ и, значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Следовательно, x входит в правую часть.

Обратно, пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда

$$x \in A \cup B \text{ и } x \in A \cup C.$$

Если $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C)$. Если же $x \notin A$, то $x \in B$ и $x \in C$. Следовательно, $x \in B \cap C$ и, значит, снова x входит в левую часть.

Разностью множеств A и B,

$$T = A \setminus B,$$

называется множество элементов A, которые не являются элементами B.

Упражнение. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Доказать.

Дополнение. Если все рассматриваемые множества, являются подмножествами одного множества E (например, рассматриваются различные множества точек прямой), то через $\bar{A}$ или CA обозначается дополнение к множеству A:

$$\bar{A} = E \setminus A.$$

До какого множества E берется дополнение — всегда должно быть ясно из контекста.

Упражнения. 1) Докажите, что:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$
$$\overline{\bigcap A_i} = \bigcup \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcup A_i} = \bigcap \bar{A}_i.$$

2) Пусть

$$A \cap B = \theta, \quad C \cap D = \theta,$$
$$|A| = |C|, \quad |B| = |D|.$$

Тогда $|A \cup B| = |C \cup D|$. Доказать.

3) $C \setminus \bigcup A_i = \bigcap (C \setminus A_i)$, $C \setminus \bigcap A_i = \bigcup (C \setminus A_i)$. Доказать.

4) *Симметрической разностью* $A \dot{-} B$ называется

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Докажите ассоциативность этой операции, т. е. равенство

$$A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C.$$

5) $\bigcup\limits_i \bigcap\limits_j A_{ij} \subseteq \bigcap\limits_j \bigcup\limits_i A_{ij}$. Доказать.

§ 4. Счетные множества

1. Множество называется *счетным*, если его можно поставить во взаимно однозначное соответствие натуральному ряду $\omega = \{1, 2, \ldots\}$.

Счетное множество A удобно записывать последовательностью его элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, обозначая через a_n тот элемент множества $a \in A$, который соответствует элементу $n \in \omega$, при некотором фиксированном взаимно однозначном соответствии множеств A и ω.

2. Счетное множество является в некотором смысле простейшим из бесконечных множеств. Это устанавливается следующими тремя теоремами.

Теорема 1. *Всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.*

Теорема 2. *Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

Теорема 3. *Если к бесконечному множеству A присоединить конечное или счетное, то получится множество, эквивалентное A.*

Доказательство теоремы 1. Пусть a_1 — какой-нибудь элемент бесконечного множества A, a_2 — какой-нибудь элемент бесконечного множества $A \setminus \{a_1\}$, a_3 — элемент все еще бесконечного множества $A \setminus \{a_1, a_2\}$ и т. д. Попарно различные элементы $a_1, a_2, a_3, \ldots$ составляют счетное подмножество множества A.

Доказательство теоремы 2. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ счетно и $B \subseteq A$. Найдем среди элементов B элемент a_{n_1} с минимальным номером n_1. Затем найдем в B элемент n_2 с минимальным номером $n_2 > n_1$ и т. д.

Таким образом, каждый элемент a_n, принадлежащий B, получит индекс $k \leqslant n$ и индексы выбранных элементов будут идти подряд $k = 1, 2, \ldots$ Если описанный процесс будет бесконечным, то $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$ окажется счетным. Если процесс исчерпает множество B на каком-нибудь шаге k, то $B = \{a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}\}$ окажется конечным (в частности, при $k = 0$ — пустым).

Доказательство теоремы 3 будет приведено позднее.

Упражнение. Пусть задана убывающая последовательность множеств

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots$$

Тогда

$$A_0 = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1})\right) \cup \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right).$$

3. Счетные объединения счетных множеств. Для надлежащего усвоения теории множеств нужно самостоятельно доказать нижеследующие важные утверждения 1) — 5). Все множества, заданные в 1) — 5), предполагаются не налегающими (т. е. попарно не пересекающимися).

1) Объединение конечного и счетного множества счетно.

2) Объединение двух счетных множеств счетно.

3) Объединение конечного множества счетных множеств счетно.

4) Объединение счетного множества конечных множеств счетно.

5) Объединение счетного множества счетных множеств счетно.

Доказательство утверждений 1)—5):

1) Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Сперва занумеруем элементы A номерами от 1 до n, а затем элементы B номерами $n + 1$, $n + 2$, ..., придавая элементу b_k новый номер $n + k$.

2) Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1\ b_2, \ldots\}$. Элементы $A \cup B$ можно занумеровать в порядке

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2, \ldots$$

Точнее: a_n получает новый номер $2n - 1$, а элемент b_n — номер $2n$.

3) Благодаря ассоциативности операции объединения $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$. Поэтому объединение трех счетных множеств тоже счетно. Аналогично доказывается (по индукции) счетность объединения любого конечного числа счетных множеств.

4) Пусть A_1, A_2, ... конечны. Занумеруем сперва элементы A_1 номерами от 1 до некоторого n_1, затем элементы A_2 номерами от $n_1 + 1$ до некоторого n_2 и т. д. Тем самым будут занумерованы элементы объединения $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

5) Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — счетны. Обозначим через a_{ij} элемент с номером j множества A_i. Элементы объединения $A = \bigcup A_i$ представляются матрицей

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

И их можно поставить в соответствие натуральным числам, как подсказывает рис. 1.3. Завершение доказательства можно оформить двумя способами:

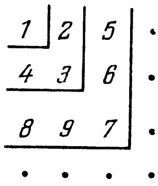


Рис. 1.3.

либо разбить $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ на $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ объединение конечных множеств C_k, отнеся к C_k элементы A, попавшие в k-ю рамку рис. 1.3, и воспользоваться пунктом 4);

либо разбить натуральный ряд ω на счетное число счетных множеств $\omega_1, \omega_2, \ldots$ и поставить во взаимно однозначное соответствие ω_i и A_i. Тем самым будет получено соответствие между всем $A = \bigcup A_i$ и $\omega = \bigcup \omega_i$.

В первом способе

$$C_1 = \{a_{11}\},\ C_2 = \{a_{12}, a_{22}, a_{21}\}, \ldots,$$
$$C_k = \{a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{kk}, a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{k,k-1}\}, \ldots$$

Во втором способе удобно ввести

$$\omega_1 = \{1, 3, 5, \ldots\},$$
$$\omega_2 = \{2, 6, 10, \ldots\},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot,$$

где ω_i состоит из чисел, делящихся на 2^{i-1}, но не делящихся на 2^i.

4. Доказательство теоремы 3. Пусть A бесконечно, B конечно или счетно, $C = A \bigcup B$. Удалим из B элементы A, т. е. введем $B_1 = B \setminus A$. Тогда $C = A \bigcup B_1$, причем $A \bigcap B_1 = \theta$. Разобьем A на счетное A_1 и остаток A_2:

$$A = A_2 \bigcup A_1, \text{ причем } A_2 \bigcap A_1 = \theta,$$
$$C = A_2 \bigcup (A_1 \bigcup B_1), \text{ причем } A_2 \bigcap (A_1 \bigcup B_1) = \theta.$$

Множество $A_1 \bigcup B_1$ счетно. Отобразив его на A_1 и отобразив A_2 на себя, мы отобразим C на A.

5. Будем говорить, что множество, *не более чем счетно*, если оно конечно или счетно. Тогда утверждения 1) — 5) можно сделать частными случаями следующей теоремы.

Теорема 4. *Объединение не более чем счетного набора не более чем счетных множеств не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $I = \{i\}$ не более чем счетно и каждому i соответствует не более чем счетное множество A_i. Надо показать, что $A = \bigcup A_i$ тоже не более чем счетно. Доказательство удлиняется из-за того, что множества A_i могут иметь общие элементы.

Можно считать, что $I = \{1, 2, \ldots\}$ бесконечно, пополнив (если надо) набор A_i пустыми множествами. Введем $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{i-1})$ для $i > 1$.

Тогда $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Каждое B_i не более чем счетно (как подмножество A_i) и все B_i не налегают. Теперь множества B_i можно разбить на две группы: конечные $B_{i'}$ и счетные $B_{i''}$. Оба объединения

$$A' = \bigcup B_{i'} \text{ и } A'' = \bigcup B_{i''}$$

не более чем счетны. Первое — как объединение не более чем счетного набора неналегающих конечных множеств. Второе — как объединение не более чем счетного набора не налегающих счетных множеств. Наконец, $A = A' \bigcup A''$ тоже не более чем счетно.

6. Продолжим изучение счетных множеств.

1) Множество пар элементов счетного множества счетно. Действительно,

$$A = \{(i, j)\}, \text{ где } i \in \omega \text{ и } j \in \omega.$$

Полагая $A_i = \{(i, 1), (i, 2), \ldots\}$, имеем

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ и любое } A_i \text{ счетно.}$$

2) Множество целых чисел счетно. Действительно, оно представляется объединением трех множеств — положительных целых чисел, отрицательных целых чисел и множества, содержащего один элемент — число нуль.

3) Множество R положительных рациональных чисел счетно. Действительно, рациональное число $r > 0$ представляется единственным образом несократимой дробью $r = m/n$ и, следовательно, парой (m, n) чисел m, n из ω. Тем самым R эквивалентно некоторому бесконечному

подмножеству множества пар счетного множества ω. Далее, как и в случае целых чисел, можно получить счетность множества всех (а не только положительных) рациональных чисел.

З а д а ч а. В ящик опускают 10 шаров. Затем один шар из ящика вынимают. Снова опускают 10 шаров и снова один вынимают и т. д. счетное число раз. Сколько шаров останется в ящике?

О т в е т. Не определено. Пусть, например, шары были занумерованы числами 1, 2, ...

Рассмотрим 2 варианта.

В первом варианте:

1-й шаг — опустили шары №№ $1 \div 10$, вынули № 10,

2-й шаг — опустили шары №№ $10 \div 19$, вынули № 19,

3-й шаг — опустили шары №№ $19 \div 28$, вынули № 28 и т. д. Тогда в ящике соберутся все шары №№ 1, 2, ...

Во втором варианте:

1-й шаг — опустили шары №№ $1 \div 10$, вынули № 1,

2-й шаг — опустили шары №№ $11 \div 20$, вынули № 2 и т. д. Тогда в ящике вовсе не останется шаров, ибо каждый шар (с номером n) на определенном шаге (номера n) был вынут из ящика и более в него не возвращался.

7. Конечное множество не может быть эквивалентно своему строгому подмножеству. Это доказывается индукцией по числу n его элементов. Наоборот, любое бесконечное множество A эквивалентно некоторому своему строгому подмножеству. Действительно, выделим элемент $a_1 \in A$ и положим $A_1 = (A \setminus \{a_1\}) \subset A$. Тогда A_1 эквивалентно A, ибо A_1 бесконечно.

8. Все бесконечные множества, построенные до сих пор, были счетными. Легко предвидеть, что и многие другие известные нам множества окажутся счетны. Пора задуматься, бывают ли вообще несчетные *) множества. Если все бесконечные множества окажутся эквивалентны, то будет справедлив широко распространенный предрассудок, что бесконечность есть только голое, не поддающееся дальнейшему подразделению отрицание конечного. И тогда теория множеств окажется бессодержательной, а понятие взаимно однозначного соответствия — бесполезным.

В следующем параграфе будет построено много бесконечных неэквивалентных множеств. Но уже сейчас можно предвидеть, что множество точек отрезка несчетно.

---

*) В дальнейшем *несчетным* называется лишь бесконечное множество, не являющееся счетным.

Именно: пусть задан отрезок $[a, b]$ и счетное множество точек $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Тогда найдется точка $x \in [a, b]$, $x \notin S$.

Действительно, на $[a, b]$ можно взять отрезок $[a_1, b_1]$ длиною меньше 1 и не содержащий точки x_1. На $[a_1, b_1]$ взять отрезок $[a_2, b_2]$ длиною меньше $^1/_2$ и не содержащий x_2 и т. д. Таким образом построена последовательность отрезков

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots, \qquad (*)$$

вложенных друг в друга, с длиной, стремящейся к нулю, причем

$$x_n \notin [a_n, b_n] \text{ при любом } n = 1, 2, \ldots$$

По известной геометрической аксиоме (Кантора) отрезки (*) имеют общую точку x:

$$x \in [a_n, b_n] \text{ при любом } n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, $x \neq x_n$ ни при каком n.

К сожалению, этот пример опирается на геометрическую аксиому; мы предпочитаем строить геометрию, опираясь на теорию множеств, а не наоборот.

Вот другой (на самом деле тот же), уже арифметический, пример несчетного множества. Рассмотрим множество $M = \{(m_1, m_2, \ldots)\}$ всех *последовательностей* $(m_1, m_2, \ldots)$ из нулей и единиц: каждое $m_i = 0$ или 1.

Предположим, что M счетно, т. е. каждому натуральному n взаимно однозначно соответствует некоторая последовательность $(m_{n1}, m_{n2}, \ldots)$ из нулей и единиц:

$$\begin{array}{l} 1 \leftrightarrow (m_{11}, \ m_{12}, \ \ldots), \\ 2 \leftrightarrow (m_{21}, \ m_{22}, \ \ldots), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Выпишем последовательность «диагональных» элементов

$$\mu = (m_{11}, \ m_{22}, \ \ldots)$$

и составим последовательность, все члены которой отличны от соответствующих членов μ. Именно:

$$\nu = (1 - m_{11}, \ 1 - m_{22}, \ \ldots).$$

ν является последовательностью из нулей и единиц. Но она не может соответствовать никакому натуральному числу n, ибо в случае $n \leftrightarrow \nu$ было бы $m_{nn} = 1 - m_{nn}$. Полученное противоречие показывает, что M несчетно. Прием, использованный при доказательстве, называется *канторовской диагональю*.

§ 5. Мощность

1. До сих пор мы говорили о равенстве мощностей $|A| = |B|$ (т. е. об эквивалентности множеств). Попытаемся ввести сравнение множеств по их мощности.

Говорят, что *мощность множества A меньше мощности множества B*, и пишут $|A| < |B|$, *если* $|A| \neq |B|$ *и существует* $B_1 \subset B$, *для которого* $|B_1| = |A|$.

Запись $|A| > |B|$ означает, что $|B| < |A|$; запись $|A| \leqslant |B|$ означает, что $|A| = |B|$ или $|A| < |B|$ (т. е. что существует $B_1 \subseteq B$, для которого $|B_1| = |A|$).

Если $|A| < |B|$ и $|A| = |A^*|$, $|B| = |B^*|$, то, очевидно, $|A^*| < |B^*|$, так что соотношение $|A| < |B|$ зависит лишь от мощности множеств A и B (а не от природы их элементов).

Далее, если $|A| < |B|$ и $|B| < |C|$, то $|A| < |C|$, так что соотношение *меньше* транзитивно.

Как быть, однако, если окажется $|A| < |B|$ и $|B| < |A|$? Невозможность такого случая показывает

Теорема о сравнении мощностей: *если* $|A| \leqslant |B|$ *и* $|B| \leqslant |A|$, *то* $|A| = |B|$.

Теореме можно придать и другие, очевидно, эквивалентные формулировки:

неравенства $|A| < |B|$ и $|B| < |A|$ исключают друг друга;

если $|A| \leqslant |B| \leqslant |C|$ и $|A| = |C|$, то $|A| = |B| = |C|$.

Доказательство. Пусть A_0 и B_0 — два множества, A_1 и B_1 — их подмножества, причем

$$|B_0| = |A_1| \text{ и } |A_0| = |B_1|.$$

При взаимно однозначном отображении B_0 на A_1 его подмножество $B_1 \subseteq B_0$ отображается на некоторое $A_2 \subseteq A_1$. Таким образом,

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \text{ и } |A_0| = |A_2|, \; |A_1| = |B_0|.$$

И все свелось к доказательству следующего предложения:

если $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2$ *и* $|A_0| = |A_2|$, *то* $|A_0| = |A_1|$.

Зафиксируем взаимно однозначное отображение f множества A_0 на A_2. Определим по индукции последовательность множеств

$$A_0,\ A_1,\ A_2 = f(A_0),\ A_3 = f(A_1),\ \ldots,\ A_n = f(A_{n-2}),\ \ldots$$

При этом

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq A_4 \supseteq A_5 \supseteq \ldots,$$

ибо $A_0 \supseteq A_1$, $A_1 \supseteq A_2$, а из $A_n \supseteq A_{n+1}$ следует, что $A_{n+2} = f(A_n) \supseteq f(A_{n+1}) = A_{n+3}$. Пусть, далее, $D = A_0 \cap A_1 \cap \ldots$ есть пересечение всех A_n. Тогда

$$A_0 = D \cup (A_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup \ldots,$$
$$A_1 = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots,$$

причем объединяемые множества не налегают. В самом деле, чтобы доказать, например, первую формулу, надо только заметить, что элемент $a \in A$ либо принадлежит всем A_n (и тогда $a \in D$), либо существует первое по порядку $A_n \not\ni a$; но тогда $a \in A_{n-1}$ и $a \in A_{n-1} \setminus A_n$. Введем еще множество

$$S = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots$$

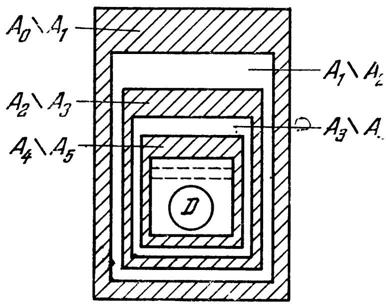


Рис. 1.4.

Тогда A_0 и A_1 представятся объединениями неналегающих множеств (см. рис. 1.4)

$$A_0 = S \cup (A_0 \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots,$$
$$A_1 = S \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup (A_6 \setminus A_7) \cup \ldots$$

Далее, так как $f(A_n \setminus A_{n+1}) = A_{n+2} \setminus A_{n+3}$, то функция f^*, определенная на A_0 условием

$$f^*(a) = \begin{cases} a, & \text{если } a \in S, \\ f(a), & \text{если } a \notin S, \end{cases}$$

дает взаимно однозначное отображение A_0 на A_1 (функция f^* оставляет на месте точки S и отображает $(A_0 \setminus A_1)$ на $(A_2 \setminus A_3)$, $(A_2 \setminus A_3)$ — на $(A_4 \setminus A_5)$ и т. д.). Значит, $|A_0| = |A_1|$, ч.т.д.

Остается еще, правда, один неприятный случай для сравнения мощностей: если A не эквивалентно никакому подмножеству B, а B — никакому подмножеству A. Тогда мы не сможем принять ни одного из соотношений $|A| = |B|$, $|A| < |B|$, $|A| > |B|$ и вынуждены называть A и B несравнимыми (по мощности).

Если A или B конечно, или счетно, то этого не может случиться. Но, в общем случае, такое положение исключается лишь постулатом выбора (см. главу «Трансфиниты»).

2. Теорема. *Множество всех подмножеств множества A имеет мощность большую, чем мощность A.*

Доказательство. Пусть $A = \{a\}$, $\alpha \subseteq A$ и $B = \{\alpha\}$ (включая $\alpha = 0$ и $\alpha = A$).

Прежде всего $|A| \leqslant |B|$, ибо каждому $a \in A$ соответствует одноэлементное подмножество $\alpha = \{a\} \in B$.

С другой стороны, мы сейчас покажем, что если каждому $a \in A$ поставлено в соответствие определенное $\alpha(a) \subseteq A$, то найдется $\alpha_1 \subseteq A$, отличное ото всех $\alpha(a)$. Тем самым будет исключено равенство $|A| = |B|$. Действительно, образуем множество α_1 всех тех a, для которых

$$a \notin \alpha(a)$$

(может быть $\alpha_1 = 0$). Теперь рассмотрим произвольный элемент a и множество $\alpha(a)$. Либо $a \in \alpha(a)$, либо $a \notin \alpha(a)$. В первом случае $a \notin \alpha_1$, во втором $a \in \alpha_1$. И, значит, в обоих случаях $\alpha_1 \neq \alpha(a)$. Ч.т.д.

3. *Множество всех подмножеств множества* $\omega = \{1, 2, \dots\}$ *называется континуумом и обозначается буквой c.* Оно эквивалентно множеству всех точек прямой (см. главу 2), и в этом его исключительная важность. По предыдущей теореме континуум несчетен. Множества, эквивалентные c, называют также *континуальными.*

4. Если среди множеств A_i, где i пробегает $I = \{i\}$, нет множества с максимальной мощностью, то $\bigcup A_i$ имеет мощность большую, чем любое A_i. Действительно, в случае $|\bigcup A_i| = |A_{i'}|$ множество $A_{i'}$ имело бы максимальную мощность.

Любопытно, что здесь I не предполагается бесконечным. Так, например, если бы существовали множества A и B, не сравнимые по мощности, то $A \cup B$ имело бы мощность, большую чем у A и у B.

5. Теперь мы можем, отправляясь от любого множества, построить набор множеств большей мощности. Сперва образуем

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots,$$

беря в качестве A_{n+1} множество всех подмножеств A_n. Затем положим $B_0 = \bigcup A_n$, так что мощность B_0 больше мощности любого A_n. Далее можно аналогично строить $B_0,\ B_1,\ \ldots$

§ 6. Арифметика мощностей

В этом параграфе арифметические действия сложения, умножения и возведения в степень будут распространены на бесконечные множества.

1. Чтобы не отвлекаться в дальнейшем, сделаем два замечания.

1.1 Набор любых множеств можно заменить набором не налегающих множеств, эквивалентных исходным. Действительно, набор множеств может у нас появиться двояко:

1) Задано множество $I = \{i\}$ и каждому i соответствует множество A_i (множества A_i могут пересекаться и не обязательно различны). В этом случае фиксированному $i \in I$ поставим в соответствие множество $A_i{}^*$:

$$A_i^* = \{(j,\ a) : j = i,\ a \in A_i\},$$

или словами: множество пар $(j,\ a)$, где j равно заданному i, а a пробегает все элементы множества A_i. Построенные $A_i{}^*$ не налегают и эквивалентны множествам A_i.

2) Задано множество $M = \{A\}$ множеств A. В этом случае (в отличие от предыдущего) все множества $A \in M$ различны. Здесь роль I играет M и каждому его элементу A соответствует (само) множество A. И все свелось к уже рассмотренному случаю: заданное $A \in M$ надо заменить множеством пар $A^* = \{(A,\ a)\}$, где A фиксировано, а a пробегает все A.

Описанную здесь замену множеств на эквивалентные не налегающие будем называть *стандартной*.

1.2. Понятие пары *) позволяет ввести не только взаимно однозначное соответствие, но и определить понятие *отображения* в самом общем виде.

Множество $f = \{p\}$ пар $p = (a, b)$, в которых $a \in A$; $b \in B$, называется отображением *из* A *в* B. Для каждой пары $p = (a, b)$ элемент b называется *образом* элемента a, элемент a — *прообразом* элемента b. Каждый $a \in A$ определяет свои образы, каждый $b \in B$ — свои прообразы. Множество образов элемента a или прообразов элемента b может, в частности, быть пустым.

В том частном случае, когда каждый $a \in A$ действительно имеет образ $b \in B$ и притом единственный, мы обозначаем этот элемент b символом $f(a)$ и говорим, что f — есть определенная на A *функция*, принимающая значения из B. Например, множество пар

$$f = \{(1, 2,) \ (2, 1), \ (3, 2)\}$$

определяет на $A = \{1, 2, 3\}$ функцию

$$f(1) = 2, \ f(2) = 1, \ f(3) = 2,$$

принимающую значения из $B = \{1, 2, 3, 5\}$.

Если, сверх того, каждый элемент $b \in B$ действительно имеет прообраз $a \in A$ и прообраз единствен, то мы обозначаем этот прообраз a через $g(b)$. Тогда

$$g(f(a)) = a \text{ для всех } a \in A,$$
$$f(g(b)) = b \text{ для всех } b \in B$$

и функции f и g называются *взаимно обратными*.

Теперь мы сможем говорить о функции f, определенной на A и принимающей значения из B, вместо того, чтобы всякий раз перечислять нужные свойства множества пар $f = \{(a, b)\}$.

1.3. Здесь и далее символы 1, 2, ..., n обозначают, соответственно, множества из 1, 2, ..., n элементов; ω обозначает счетное множество; c — континуальное. Для однозначности, если угодно, можно считать множество 1 состоящим из (одного элемента) пустого множества θ, множество 2 — из элементов θ и 1; $3 = \{\theta, 1, 2\}$ и т. д.; ω — из всех натуральных чисел; c — из всех подмножеств множества ω.

*) См. замечание в конце § 2.

2. Сумма. Если каждому элементу $i \in I$ соответствует множество A_i, то их суммой (ΣA_i) называют объединение любого набора эквивалентных неналегающих заменителей. Для определенности иногда удобно брать объединение стандартных заменителей:

$$\sum_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i^*,$$

а если A_i не налегают, то объединение их самих.

Мощность суммы (а сейчас нас интересует лишь она) однозначно определяется мощностью I и слагаемых (а не их природой и не природой заменителей). Действительно, если $|I| = |J|$ и $|A_i| = |B_j|$ при каждом $i \leftrightarrow j$ ($i \in I$, $j \in J$), то

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i^* \right| = \left| \bigcup_{j \in J} B_j^* \right|.$$

Иногда сумму обозначают знаком $+$. Например, $A + B$, или $A + B + C$, или $A_1 + A_2 + \ldots$ Ясно, что операция суммы коммутативна и ассоциативна (в том смысле, что получающиеся множества имеют одинаковую мощность):

$$|A + B| = |B + A|, \quad |A + (B + C)| = |(A + B) + C|.$$

Если множества A и B конечны, состоят из m и n элементов, то $A + B$ состоит из $m + n$ элементов, так что введенное понятие суммы действительно обобщает элементарное.

3. Произведение. Пусть каждому $i \in I$ соответствует множество A_i. Произведением

$$\prod_{i \in I} A_i = F, \quad \text{где } F = \{f\}, \ f(i) \in A_i,$$

называется множество $F = \{f\}$ всех функций f, определенных на I и принимающих в каждой точке $i \in I$ значения $f(i)$, принадлежащие множеству A_i.

Если это удобно, то умножение обозначают знаком $\times$. Например, $A \times B$ или $A_1 \times A_2 \times \ldots$

Мощность произведения, очевидно, зависит лишь от мощностей сомножителей (т. е. не меняется при замене I и сомножителей эквивалентными множествами). Вообще говоря, даже $A_1 \times A_2 \neq A_2 \times A_1$, но легко проверить, что

$$|A \times B| = |B \times A|, \quad |A \times (B \times C)| = |A \times B \times C|.$$

Несколько примеров. Рассмотрим произведение $A \times B$. Для этого удобно взять $I = \{1, 2\}$ из двух элементов 1 и 2 и поставить в соответствие $1 \to A$, $2 \to B$. Тогда $A \times B$ будет множеством функций f, определенных на $\{1, 2\}$ и принимающих значения $f(1) \in A$, $f(2) \in B$. Такая функция f однозначно определяется парой $(f(1), f(2))$; и обратно — пара (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, определяет функцию f этого типа. Поэтому произведение $A \times B$ эквивалентно множеству всех пар $\{(a, b)\}$. Аналогично $A \times B \times C$ эквивалентно множеству троек $\{(a, b, c)\}$ по всем $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Вследствие этого произведением $A \times B$ часто называют множество всех пар $\{(a, b)\}$, произведением $A \times B \times C$ — множество всех троек $\{(a, b, c)\}$ и т. д. И даже произведением счетного набора множеств $A \times B \times \ldots$ называют множество всех последовательностей $\{(a, b, \ldots)\}$, в которых $a \in A$, $b \in B$, ... Впрочем, в последнем случае, вспомнив определение *последовательности*, мы автоматически вернемся ко множеству пар $\{(1, a), (2, b), \ldots\}$ и, значит, к функции f, заданной на ω и принимающей в точке $i \in \omega$ значение $f(i)$ из i-го сомножителя.

Если множество A состоит из m элементов, B — из n элементов, то множество $A \times B$ — множество пар (a, b) — содержит $m \times n$ элементов. Так что произведение множеств обобщает произведение (конечных) чисел.

Указание. Если Вы не были раньше знакомы с понятием произведения двух множеств $A \times B$, то после разбора этих примеров вернитесь к общему определению произведения. Решите, как можно упростить общее определение в случае неналегающих сомножителей.

Теорема. *Если* $|A_i| = |A|$ *при всех* $i \in I$, *то*

$$\Big|\sum_{i \in I} A_i\Big| = |A \times I|. \tag{*}$$

Доказательство. Будем считать A_i неналегающими и обозначим через f_i отображение $f_i(a_i) = a$ (взаимно однозначное) множества $A_i = \{a_i\}$ на $A = \{a\}$. Поскольку A_i не налегают, то каждому элементу s левой части $(*)$ взаимно однозначно соответствует элемент π правой части:

$$s = a_i \leftrightarrow (a_i,\ i) \leftrightarrow (f_i(a_i),\ i) = (a,\ i) = \pi.$$

Упражнение. Доказать:

1) $|A \times (B + C)| = |(A \times B) + (A \times C)|$;

2) $|\prod_{i \in I} (A_i \times B_i)| = |(\prod_{i \in I} A_i) \times (\prod_{i \in I} B_i)|$.

4. Степень. A^I, по определению, есть множество функций f, определенных на I и принимающих значения из A:

$$A^I = F, \text{ где } F = \{f\},\ f(i) = a,\ i \in I,\ a \in A.$$

Ясно, что мощность степени зависит лишь от мощностей основания и показателя.

Если A и I конечны, состоят из m и k элементов, то A^I состоит из m^k элементов, так что наше определение степени является обобщением элементарного. Действительно, пусть

$$A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m\}, \quad I = \{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k]$$

и $f(i) = a$. Тогда значение $f(i_1)$ в точке i_1 можно выбрать m способами; после этого значение $f(i_2)$ можно снова выбрать m способами и т. д. Значит, всевозможных функций f будет m^k штук.

Важный пример. *Пусть A состоит из 2-х элементов* (для определенности $A = \{0,\ 1\}$). *Тогда A^I эквивалентно множеству всех подмножеств I.*

Действительно, функция f (заданная на I и принимающая значение из A) взаимно однозначно определяется подмножеством $F \subseteq I$, в точках которого f равна 1.

Теорема.

1) *Если* $|A_i| = |A|$ *при всех* $i \in I$, *то* $|\prod_{i \in I} A_i| = |A^I|$;

2) $|(A \times B)^I| = |A^I \times B^I|$;

3) $|A^{I_1} \times A^{I_2}| = |A^{(I_1 + I_2)}|$;

4) $|(A^{I_1})^{I_2}| = |A^{(I_1 \times I_2)}|$.

Доказательство.

1) Заменим все A_i одним множеством A. Тогда элемент π произведения, по определению, станет функцией, заданной на I и принимающей значения из A, т. е. станет элементом $\varphi \in A^I$. Это соответствие взаимно однозначно.

2) Элемент левой части — функция f, $f(i) = (a, b)$; элемент правой — пара функций (f_A, f_B), $f_A(i) = a$, $f_B(i) = b$. Искомое соответствие задается правилом

$$f \leftrightarrow (f_A, f_B),$$

когда $f(i) = (f_A(i), f_B(i))$ при всех $i \in I$. Оно иллюстрируется рис. 1.5 и записью

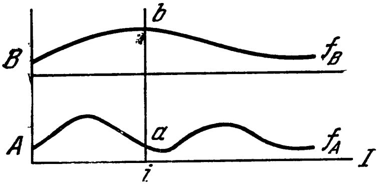


Рис. 1.5.

$$f = \{(i, f(i))\} = \\ = \{(i, (f_A(i), f_B(i)))\} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\{(i, f_A(i))\}, \{(i, f_B(i))\}) = \\ = (f_A, f_B).$$

3) Будем считать I_1 и I_2 непересекающимися (например, заменим их стандартными эквивалентами). Элемент левой части — это пара функций $\pi = (f_1, f_2)$, определенных (соответственно) на I_1 и I_2 и принимающих значения из A. Элемент правой части — функция f, определенная на $I_1 \bigcup I_2$. Будем считать $\pi \leftrightarrow f$, когда

$$f(i) = \begin{cases} f_1(i) & \text{при } i \in I_1, \\ f_2(i) & \text{при } i \in I_2. \end{cases}$$

Соответствие взаимно однозначно, так как разным π соответствуют разные f и обратно (рис. 1.6).

4) Элемент левой части есть функция f_2, заданная на I_2; ее

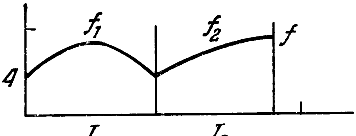


Рис. 1.6.

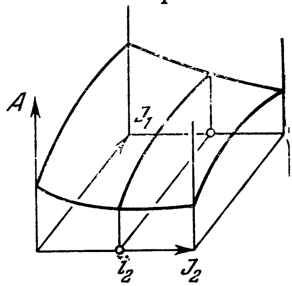


Рис. 1.7.

значением в точке $i_2 \in I_2$ является функция f_{i_2}, заданная на $I_1 = \{i_1\}$ со значениями из A. Таким образом, f_2 определяет (взаимно однозначно) функцию f:

$$f(i_1, i_2) = f_{i_2}(i_1),$$

заданную на парах (i_1, i_2) (т. е. на $I_1 \times I_2$) со значениями из A (рис. 1.7).

5. Арифметика конечных, счетных и континуальных множеств. Поскольку (число слагаемых счетно)

$$|1+1+\cdots| = |\omega|,$$
$$|\omega+\omega+\cdots| = |\omega|,$$

то

$$|\omega| = |1+1+\ldots| \leqslant |n_1+n_2+\ldots| \leqslant |\omega+\omega+\ldots| = |\omega|.$$

1) Таким образом, по теореме эквивалентности:

$$|1+1+\cdots| = |\omega|,$$
$$|n_1+n_2+\cdots| = |\omega|,$$
$$|\omega+\omega+\cdots| = |\omega\times\omega| = |\omega|,$$
$$|\omega^3| = |\omega\times\omega^2| = |\omega|,$$
$$|\omega^n| = |\omega|,$$
$$|\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots| = |\omega|.$$

Поскольку $|2^\omega| = |c|$ и $|c^\omega| = |(2^\omega)^\omega| = |2^{\omega\times\omega}| = |2^\omega|$, то

$$|c| \leqslant |c+n| \leqslant |c+\omega| \leqslant |c+c| = |2\times c| \leqslant |n\times c| \leqslant$$
$$\leqslant |c+c+\cdots| = |c\times\omega| \leqslant |c\times c| \leqslant |c\times c\times\cdots| = |c^\omega| = |c|.$$

2) Таким образом,

$$|2^\omega| = |n^\omega| = |\omega^\omega| = |c^\omega| = |c|,$$
$$|c+c| = |c\times n| = |c+c+\cdots| = |c\times\omega| = |c\times c| = |c|,$$
$$|c^n| = |c\times c\times\cdots| = |c^\omega| = |c|,$$
$$|c+c^2+c^3+\cdots| = |c\times c^2\times c^3\times\cdots| = |c|.$$

3) При континуальном наборе слагаемых

$$|c| = |m+n+\cdots \text{(контин.)}| = |\omega\times c| = |c|.$$

Но при континуальном наборе сомножителей

$$|2^c| = |m\times n\times\cdots\text{(контин.)}| = |\omega^c| = |c^c| = |2^{\omega\times c}| = |2^c|$$

получается множество мощности 2^c (гиперконтинуум).

§ 7. Приложение арифметики мощностей

1. Арифметические действия с множествами дают возможность легко решить много задач по определению мощности различных множеств.

1) Пусть $A = \{a\}$ — произвольное множество. Рассмотрим:

$\alpha_n(A) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$ — множество n-членных последовательностей из элементов A;

$\alpha(A) = \alpha_1(A) + \alpha_2(A) + \ldots$ — множество конечных последовательностей из элементов A;

$\alpha_\omega(A) = \{(a_1, a_2, \ldots)\}$ — множество (бесконечных) последовательностей из элементов A.

Выразите мощность этих множеств через мощность A. Каковы эти мощности при $|A| = |\omega|$ и $|A| = |c|$?

Решение. По самому определению степени

$$|\alpha_n(A)| = |A^n|, |\alpha(A)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} A^n\right|, \quad |\alpha_\omega(A)| = |A^\omega|.$$

Таким образом,

$$|\alpha_n(\omega)| = |\omega|, \quad |\alpha(\omega)| = |\omega|, \quad |\alpha_\omega(\omega)| = |c|,$$

$$|\alpha_n(c)| = |c|, \quad |\alpha(c)| = |c|, \quad |\alpha_\omega(c)| = |(2^\omega)^\omega| = |c|.$$

Нижеследующие задачи 2) — 5) являются частными случаями задачи 1).

2) Сколько (A) существует последовательностей из нулей и единиц? Т. е., какова мощность искомого множества A?

Решение. По самому определению степени

$$|A| = |2^\omega| = |c|.$$

3) Сколько (A) существует последовательностей из десятичных цифр 0, 1, ..., 9?

Решение. $|A| = |10^\omega| = |c|$, ибо $|2^\omega| \leqslant |10^\omega| \leqslant |(2^\omega)^\omega|$.

4) Пусть имеется конечный набор из n знаков (например, из букв, знаков препинания и пропуска между словами). Сколько может быть написано конечных текстов?

Решение. Текстов длины m будет m^n (многие из них будут бессмысленны), а всех конечных текстов — счетное множество. Таким образом, счетно множество всех литературных произведений, всех симфоний и т. д.

5) *Канторовская дорога* (рис. 1.8). Из станции $*$ выходят две ветки: левая 0, правая 1. Они заканчиваются станциями 0 и 1. Из станций 0 выходят ветки 00 и 01, заканчивающиеся станциями 00 и 01; из станции 1 выходят ветки 10 и 11, заканчивающиеся станциями 10 и 11, и т. д. Дорогой называется бесконечная последовательность веток, продолжающих друг друга, начинающаяся на станции $*$. Например, дорога из веток $0, 01, 010, \ldots$ На канторовской дороге счетное число станций (на уровне n имеется 2^n станций, считая нулевым уровень станции $*$), но континуум дорог. Действительно, каждой последовательности нулей и единиц

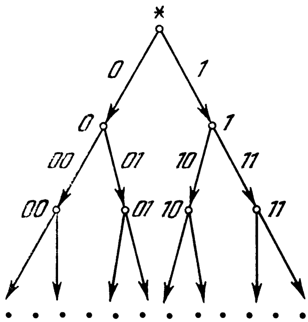


Рис. 1.8.

$$a_1,\ a_2,\ \ldots$$

взаимно однозначно соответствует дорога, проходящая через станции $a_1,\ a_1a_2,\ a_1a_2a_3,\ \ldots$

2. Менее стандартны решения задач 6) — 9) о мощности некоторых систем подмножеств.

6) Сколько n-элементных подмножеств A_n у ω?

Ясно, что $|A_n| \geqslant \omega$, ибо

$$A_n \supseteq \{\{1, 2, \ldots, n\},\ \{2, 3, \ldots, n+1\}, \ldots\}.$$

С другой стороны, $|A_n| \leqslant |\omega^n|$, ибо элементам A_n соответствуют различные функции $f \in \omega^n$. Значит,

$$|\omega| \leqslant |A_n| \leqslant |\omega^n| = |\omega| \quad \text{и} \quad |A_n| = |\omega|.$$

7) Сколько (А) конечных подмножеств имеет ω?

В обозначениях предыдущей задачи имеем

$$|A| = |A_1 + A_2 + \cdots| = |\omega|.$$

8) Сколько бесконечных подмножеств имеет ω?

Всех подмножеств имеется 2^ω, конечных подмножеств имеется ω, значит, бесконечных остается тоже $|2^\omega| = |c|$ (ибо добавление счетного множества не меняет мощности бесконечного множества).

9) Сколько (U) счетных подмножеств имеет c?

Решение. Выделим в c счетное подмножество $A = \{a_2, a_3, \ldots\}$ и разобьем c на объединение $c = A \cup B$, где $B = c \setminus A$. Множество последовательностей $(b, a_2, a_3, \ldots)$, где $b \in B$, уже континуально. Следовательно, $|U| \geqslant |c|$. Но $U \subseteq \alpha_\omega(c)$. Значит, $|c| \leqslant |U| \leqslant |c|$ и $|U| = |c|$.

10) В дальнейшем мы увидим, что множество $A = \{x\}$ точек отрезка длины единица имеет мощность континуума. Следовательно, множество $B = \{(x, y)\}$ точек квадрата (со стороной единица) эквивалентно множеству точек отрезка со стороной единица, ибо

$$B = A \times A \text{ и } |B| = |c \times c| = |c|.$$

Аналогичным образом равенство $|c^3| = |c|$ означает эквивалентность множества точек единичного куба и отрезка. И даже куб в счетномерном пространстве имеет точек c^ω, т. е. континуум.

11) Если $|A + B| = |c|$, то $|A| = |c|$ или $|B| = |c|$.

Доказательство. Возьмем множество пар $C = c \times c = \{(x, y)\}$, где $x \in c$, $y \in c$, и отобразим взаимно однозначно $A + B$ на C. Сохранив обозначения A и B за образами этих множеств, будем иметь $A \cup B = C$.

Если при каком-нибудь фиксированном $x_0 \in c$ множество $X_0 = \{(x_0, y)\}$ пар $(x_0, y) \in C$ содержится в A, то $|A| = |c|$. В противном случае для каждого $x \in c$ найдется пара $(x, y(x)) \in C$, которая $(x, y(x)) \notin A$ и, значит, $(x, y(x)) \in B$. Множество $Z = \{(x, y(x))\}$ этих пар континуально и $Z \subseteq B$. Значит, $|B| = |c|$. Здесь был использован постулат выбора (см. гл. Трансфиниты).

Эта задача может быть развита в трех направлениях.

11.1) Если $|A_1 + A_2 + \ldots| = |c|$, то хотя бы одно слагаемое континуально. Действительно, можно считать, что $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = c^\omega$ и элементами c^ω являются последовательности $(x_1, x_2, \ldots)$ элементов $x_n \in c$.

Пусть, вопреки доказываемому, каждое $|A_n| < |c|$. Тогда для некоторого x_1^0 любая последовательность $(x_1^0, x_2, x_3, \ldots) \notin A_1$. Теперь для некоторого x_2^0 любая $(x_1^0, x_2^0, x_3, x_4, \ldots) \notin A_2$ и т. д. В результате последовательность $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, \ldots)$ из c^ω не входит ни в одно A_n. Это невозможно.

11.2) Для любого множества $|A + A| = |A|$. Доказательство этого факта получено лишь с привлечением дополнительного постулата (постулата выбора, см. главу о трансфинитах).

11.3) Если $A_1 + A_2 + \ldots = B$ и все слагаемые бесконечны, то хотя бы одно из них имеет мощность B. Это неверно! Отправляясь от любого бесконечного A_1, положим по индукции $A_{n+1} = 2^{A_n}$. Тогда $|B| \geqslant |A_{n+1}| > > |A_n|$ для длюбого n.

12) Алгебраическим числом называется корень полинома с целыми коэффициентами. Сколько алгебраических чисел?

Решение. Полином степени n

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$$

однозначно определяется своими коэффициентами. Следовательно, полиномов степени n имеется ω^{n+1}. Корней у них не более $n \times \omega^{n+1}$. Всех алгебраических чисел не более

$$|1 \times \omega^2 + 2 \times \omega^3 + \ldots| \leqslant |\omega \times \omega| = |\omega|.$$

И, так как искомое множество бесконечно (содержит все целые числа), то оно счетно.

Замечание. Корень полинома с рациональными коэффициентами, очевидно, является числом алгебраическим. Более того: корень полинома с алгебраическими коэффициентами тоже алгебраичен (но это уже трудная алгебраическая теорема).

13) Сколько (A) функций f одного действительного переменного, принимающих лишь два значения 0 и 1?

Сколько (B) действительных функций одного действительного переменного? (Воспользоваться тем, что действительных чисел c.)

Решение. По самому определению степени $A = 2^c$, $B = c^c$. Так что $|B| = |(2^c)^c| = |2^{c \times c}| = |2^c| = = |A| > |c|$.

14) Сколько существует действительных функций, заданных в рациональных точках?

Решение: $|c^\omega| = |2^{\omega \times \omega}| = |c|$.

3. Разные задачи. В задачах 1) — 3) знаки Σ и Π берутся по некоторому $I = \{i\}$.

1) $|A^{\Sigma B_i}| = |\Pi A^{B_i}|$.

2) $|(\Pi A_i)^B| = |\Pi A_i^B|$.

3) Если $|A_i| < |B_i|$ при всех i, то $|\Sigma A_i| < |\Pi B_i|$ (Кёниг). При $A_i \equiv 1$, $B_i \equiv 2$ это дает $|I| < |2^I|$.

4) Построить несчетное A, для которого $|A| < |A^\omega|$. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

5) Пусть A бесконечно. Показать, что множество B всех его счетных подмножеств имеет мощность $|B| = |A^\omega|$.

6) Пусть A — множество и $B = \{b\}$ — множество всех тех его подмножеств $b \subset A$, у кототых $|b| < |A|$. Существует ли такое A, что $|B| < |A|$. Проблема не решена и заведомо очень трудна.

7) Существует ли A такое, что $|\omega| < |A| < |c|$? Проблема неразрешима (Коуэн), несмотря на существование «первого несчетного» множества B, т. е. такого, у которого любое подмножество $C \subseteq B$ обязательно конечно, счетно или имеет мощность B.

8) Существуют ли такие A и B , что

$$|A| < |B| < |2^A|?$$

Проблема не решена и заведомо очень трудна.

§ 8. Разбиение на классы

В различных разделах математики возникают задачи о разбиении заданного множества на непересекающиеся подмножества элементов, обладающих определенными свойствами. Представляется полезным проделать это разбиение однажды, в общем виде, введя понятие «отношения эквивалентности».

Отношение $\sim$ между элементами множества $A = \{a, b, \ldots\}$ называется *отношением эквивалентности*, если

(1) $a \sim a$ для любого $a \in A$,

(2) из $a \sim b$ следует $b \sim a$,

(3) из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$.

Имея в виду эти свойства, говорят, что эквивалентность *рефлексивна*, *симметрична* и *транзитивна*.

Замечание. Отношение $\sim$ это, попросту говоря, множество $f = \{\pi\}$ пар $\pi = (a, b)$ элементов A. Перечисленные свойства суть:

(1) $(a, a) \in f$ при любом $a \in A$,

(2) из $(a, b) \in f$ следует $(b, a) \in f$,

(3) из $(a, b) \in f$ и $(b, c) \in f$ следует $(a, c) \in f$.

Упражнение. Обязательно постройте примеры отношений, в которых два свойства эквивалентности выполняются, а третье — нет.

Т е о р е м а   о   р а з б и е н и и. *Если на множестве $A = \{a, b, \ldots\}$ задано отношение эквивалентности, то множество можно разбить на неналегающие подмножества так, что $a \sim b$ тогда и только тогда когда a и b принадлежат одному подмножеству.*

Действительно, обозначим через $\alpha(a)$ множество элементов $b \in A$, эквивалентных a. В случае $a \sim b$ множества $\alpha(a) = \alpha(b)$; в случае $a \not\sim b$ будет $\alpha(a) \cap \alpha(b) = \theta$, ибо a и b не имеют общих эквивалентных элементов. Введем множество $A^* = \{\alpha\}$ тех множеств $\alpha \subseteq A$, которые равняются $\alpha(a)$, хотя бы при одном $a \in A$. Любые два множества $\alpha \in A^*$ различны (по определению A^*) и, следовательно, не пересекаются. Наконец каждый элемент $a \in A$ входит в некоторое $\alpha \in A^*$ (именно, в $\alpha = \alpha(a)$).

З а м е ч а н и е. Отношение эквивалентности равносильно заданию для каждого $a \in A$ множества $\alpha(a)$ с условиями:

(1′) $(\forall a \in A)\ (a \in \alpha(a))$,

(2′) $(\forall a, b \in A)\ ((\alpha(a) = \alpha(b))$ или $(\alpha(a) \cap \alpha(b) = \theta))$.

Действительно, как при задании отношения эквивалентности, так и при задании множеств $\alpha(a)$ все множество A разбивается на неналегающие множества α, причем эквивалентность элементов a, b означает их принадлежность общему множеству α.

П р и м е р ы. (1) Пусть $R = \{r\}$ — множество рациональных чисел и $r_1 \sim r_2$, когда $r_1 - r_2$ — целое. Это отношение удовлетворяет условиям эквивалентности, и R разбивается на классы эквивалентных чисел: $R = \bigcup \rho$. В данном случае мы могли бы рассмотреть множество $R_0 = \{r_0\}$ рациональных чисел $0 \leqslant r_0 < 1$ и отнести каждому r_0 класс $\rho(r_0) = \{r_0 + n\}$ чисел вида $r_0 + n$, где n — целое. Этим R было бы разбито на классы $\{\rho\}$ без теоремы о разбиении.

(2) Пусть $X = \{x\}$ — множество точек прямой и $x_1 \sim x_2$, когда расстояние между x_1 и x_2 рационально. Это отношение удовлетворяет условиям эквивалентности, и $X = \bigcup \alpha$ разбивается на непересекающиеся классы $\alpha = \{x\}$ точек x с рациональными расстояниями. Но мы не умеем эффективно определить в каждом классе α по одному представителю $x(\alpha) \in \alpha$ и получить множество $\{\alpha\}$ всех классов α без теоремы о разбиении.

§ 9. О парадоксах теории множеств

1. С самого начала в теории множеств были замечены парадоксы. Вот самый простой. Пусть M — множество всех множеств. Множество N всех его подмножеств должно иметь мощность, большую чем мощность M. Но это невозможно, ибо $M \supseteq N$.

Это затруднение выступает более ясно в парадоксе Б. Рассела. Пусть A — множество всех натуральных чисел, каждое из которых можно определить фразой, содержащей менее ста русских слов. Содержит ли A весь натуральный ряд? С одной стороны A кажется конечным, ибо в русском языке конечное число слов (скажем, n) и рассматриваемых фраз не более чем n^{100}. Но если A конечно, то рассмотрим

> «Наименьшее натуральное число, не входящее во множество тех чисел, каждое из которых можно определить фразой, содержащей менее ста русских слов».

Это число, по определению, не входит в A, но определяется фразой, содержащей меньше ста русских слов. Полученное противоречие доказывает, что A содержит весь натуральный ряд.

Причина парадокса в том, что, образовав множество A, мы обогатили русский язык и фраза, взятая в кавычки, стала осмысленной.

Не корректно определять множества, которые меняются в процессе их образования. Все парадоксы теории множеств построены на таких определениях.

2. Другое затруднение — существование неразрешимых проблем — обнаружено не только в теории множеств. П. Новиков доказал неразрешимость некоторой проблемы классической алгебры.

Но существо дела здесь тоже в определении множества. «Множество A задано, если про каждый элемент... определено, входит он в A или нет». И при этом не ясно, как мы это выясним. Если A задано запахом его элементов, а B — вкусом, то мы можем и не суметь решить, одно ли это множество. Континуум (как множество подмножеств счетного множества) и первое несчетное множество (см. главу 5) оказались заданы столь различно, что не существует способа решить, эквивалентны ли эти множества.

3. Значительная часть этой главы взята из книги Ф. Хаусдорфа «Теория множеств», а все изложенное без указания авторства — доказано Г. Кантором. Только теорема о сравнении мощностей принадлежит Г. Кантору и Ф. Бернштейну.

Для обозначения мощности Кантор употребил букву $\aleph$ (произносится — а́леф). В математической литературе общеприняты обозначения: $\aleph_0$ для $|\omega|$, $\aleph_1$ для мощности первого несчетного множества, $\aleph$ для $|c|$.

ГЛАВА 2

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

Бог создал натуральный ряд, остальное — дело рук человеческих.

Кронекер

В переводе на более серьезный язык этот эпиграф означает, что мы воспользуемся аксиомами натурального ряда и больше никаких аксиом нам не понадобится. Конечно, в «наивной» канторовской математике (на уровне которой мы намерены оставаться) нам требуются понятия: множество, элемент, ... и некоторые их свойства. Но никаких аксиом Архимеда, Кантора и т. д. все же не нужно.

Свойства натурального ряда (и целых чисел) здесь предполагаются известными. К ним мы возвращаться не будем. Можно было бы предполагать известными и рациональные числа. Но это, как заметил Лебег, бесполезно.

§ 2. Цель построения и ожидаемые свойства действительных чисел

Этот параграф не математический и стиль его — не содержащий ни точных утверждений, ни доказательств — не следует путать со стилем остального изложения.

1. Действительные числа, по-видимому, могут возникнуть при измерении длин в метрической системе единиц. Пусть измеряется длина отрезка l (рис. 2.1). Сперва определяется, сколько раз метр целиком откладывается на l. Пусть отложился 27 раз. Пишем

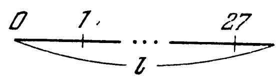


Рис. 2.1.

$$l \approx 27.$$

Затем берем единицу, в 10 раз меньшую (1/10 *м*), и смотрим, сколько еще раз отложится она. Пусть отложилась 3 раза.

Продолжаем писать

$$l \approx 27{,}3.$$

Снова берем единицу, в 10 раз меньшую (1/10 от 1/10 *м*). Пусть она отложилась еще 5 раз —

$$l \approx 27{,}35$$

и т. д. Процесс измерения может закончиться. Это случится, если на очередном шаге правый конец отрезка l попадает на деление. И длина l выразится конечной строкой. Например,

$$l \sim 27{,}3504.$$

Но может случиться и так, что конец отрезка l никогда не попадет на деление. И тогда измерение l доставит бесконечную строку

$$l \sim 27{,}3504...$$

Это наводит на мысль определить действительные числа как всевозможные конечные и бесконечные последовательности десятичных цифр с (одной) запятой между ними; и считать, что различные последовательности суть различные действительные числа (последнее — неосторожно!).

2. Пусть измерение отрезков a и b доставляет последовательности

$$a \sim a^{(-k)}a^{(-k+1)} \ldots a^{(0)},\ a^{(1)}a^{(2)} \ldots,$$
$$b \sim b^{(-k)}b^{(-k+1)} \ldots b^{(0)},\ b^{(1)}b^{(2)} \ldots$$

(где все $a^{(i)}$ и $b^{(i)}$ — десятичные цифры). Если длина a меньше длины b, то естественно ожидать, что в первой (при счете слева направо) паре различных цифр ($a^{(i)} \neq b^{(i)}$) окажется $a^{(i)} < b^{(i)}$. И наоборот (последнее — снова сомнительно).

3. Если отрезок a меньше отрезка b, то, наверно, существует отрезок c, который длиннее a, но короче b. Или — что то же самое — если действительное число a меньше действительного числа b, то должно существовать действительное число c, большее a, но меньшее b. Это пожелание не столь очевидно, как 1 и 2, но именно его нужно принять.

4. Требования 1—3, к сожалению, несовместимы. Рассмотрим две последовательности цифр:

$$a = 1,$$
$$b = 0{,}99 \ldots$$

Очевидно, что не существует последовательности c, промежуточной между a и b. Возникает дилемма:

1) либо считать, что последовательности a и b доставляют одно и то же число;

2) либо считать, что последовательности a и b доставляют два различных числа, между которыми нет промежуточных. При определении действительных чисел принимается решение 1).

§ 3. Определение действительных чисел

1. **Определение.** Действительные числа (не отрицательные) — это конечные и бесконечные последовательности десятичных цифр с (одной) запятой между ними; при этом последовательность (т. е. число) *с хвостом девяток считается равной соответствующей «округленной» конечной последовательности*; нули слева (до первой значащей цифры перед запятой) и справа (за последней значащей цифрой после запятой) в расчет не принимаются.

Если мы хотим иметь множество всех (различных) действительных чисел, то удобно рассматривать все бесконечные последовательности десятичных цифр с запятой, но без нулей слева до первой значащей цифры перед запятой и без хвоста девяток. Такую запись называют *приведенной*. Впрочем, иногда в приведенной записи отбрасывают хвосты нулей за запятой и, следовательно, рассматривают множество конечных и бесконечных последовательностей, но уже без хвостов нулей и без хвостов девяток.

В дальнейшем всюду, где не оговорено противного, *под действительным числом* a (неотрицательным):

$$a \sim a^{(-k)}a^{(-k+1)}\ldots a^{(0)},\ a^{(1)}a^{(2)}\ldots,$$

понимается бесконечная *последовательность без хвоста девяток* (т. е. *приведенная*).

2. **Определение.** Полагаем $a < b$, если (для приведенных последовательностей) в первой паре не равных $a^{(n)} \neq b^{(n)}$ будет $a^{(n)} < b^{(n)}$ *).

---

*) Формулой это можно записать так: $a < b$, если

$$(\exists n \forall i < n)\,(a^{(i)} = b^{(i)} \text{ и } a^{(n)} < b^{(n)}).$$

З а м е ч а н и е. Для *конечно-десятичных* чисел (т. е. представленных конечными последовательностями цифр — или, что то же самое, с хвостом нулей) наше определение совпадает со старым, и поэтому неравенство может обозначаться тем же знаком $<$.

У п р а ж н е н и е . Для двух чисел a и b, согласно определению, выполняется одна и только одна из трех возможностей:

$$a = b \text{ (т. е. } a^{(i)} = b^{(i)} \text{ при всех } i), \quad a < b, \; a > b$$

(последнее означает $b < a$). Напомним, что здесь последовательности — приведенные. Доказать.

О б о з н а ч е н и е. 10^{-n}, как обычно, обозначает число

$$0{,}0 \ldots 01 \text{ (всего } n \text{ нулей).}$$

Аналогично $m \cdot 10^{-n}$ (где m — цифра от 0 до 9) обозначает число $0{,}0 \ldots 0m$ (всего n нулей).

У п р а ж н е н и е. Если $0 \leqslant a \leqslant m \cdot 10^{-n}$ при всех n (где m — цифра), то $a = 0$. Указание: надо убедиться, что любая цифра $a^{(i)}$ есть нуль.

Т е о р е м а 1. *Действительные* (неотрицательные) *числа упорядочены, т. е.* $(a < b$ *и* $b < c) \Rightarrow (a < c)$.

У к а з а н и е. Найти минимальное n, при котором: $a^{(n)} \neq b^{(n)}$ или $b^{(n)} \neq c^{(n)}$.

С л е д с т в и е. $(a \leqslant b$ и $b \leqslant c) \Rightarrow (a \leqslant c)$.

У п р а ж н е н и е. Если $a < c$, то найдется b, для которого $a < b < c$. Это b можно выбрать конечно-значным.

Р е ш е н и е. Пусть n — минимальное число, при котором $a^{(n)} < c^{(n)}$. Пусть $m > n$ — минимальное, при котором $a^{(m)} \neq 9$. Тогда цифры искомого b можно определить условиями:

$$b^{(i)} = a^{(i)}, \; a^{(m)} + 1, \; 0 \text{ при } i < m, \; = m, \; > m.$$

Удобно иметь признак для сравнения чисел $a = \{a^{(i)}\}$, $b = \{b^{(i)}\}$, заданных любыми (не обязательно приведенными) последовательностями:

Л е м м а 1. *Пусть n — минимальный номер, для которого $a^{(n)} \neq b^{(n)}$, причем $a^{(n)} < b^{(n)}$. Тогда $a \leqslant b$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о длиннее, чем можно ожидать. Приведем (если она не приведена) последовательность $\{b^{(i)}\}$. Так как старшая изменившаяся цифра при этом увеличивается (на единицу), то условие леммы сохраняется (для нового значения n). Теперь приведем $\{a^{(i)}\}$. Разряды левее $a^{(n)}$ при этом сохранятся, ибо $a^{(n)} < b^{(n)} \leqslant \leqslant 9$. Если и теперь $a^{(n)} < b^{(n)}$, то $a < b$. Если же стало $a^{(n)} = b^{(n)}$, то $a^{(n)}$ — увеличилось, значит, при всех $i > n$ стало $a^{(i)} = 0 \leqslant b^{(i)}$. Так что $a \leqslant b$.

§ 4. Верхняя граница и верхняя грань

Здесь $A = \{a\}$ — множество; a, b, c, ... — действительные числа.

Определение. Если

$$(\exists b \, \forall a \in A)(a \leqslant b),$$

то множество A называется *ограниченным* сверху, а число b называется его верхней *границей*.

Если d не является верхней границей A, то $(\exists a \in A)$ $(a > d)$.

Упражнения. (1) Если $A \subseteq B$ и c является верхней границей B, то c будет верхней границей и для A. (2) Если c и d являются верхними границами для A и B соответственно, то $\max(c, d)$ будет верхней границей для $A \cup B$, а $\min(c, d)$ — верхней границей для $A \cap B \neq \theta$.

Определение. Наименьшая из верхних границ A называется верхней *гранью* A и обозначается $\sup A$ или $\sup\limits_{a \in A} a$. Вот это же определение в двух употребительных записях:

(1) c является $\sup A$, если удовлетворяет двум условиям:

1) c является верхней границей A,

2) любое $d < c$ уже не является верхней границей A.

(2) c является $\sup A$, если:

1) $(\forall a \in A)(a \leqslant c)$,

2) $(\forall d < c \, \exists a \in A)(a > d)$.

Замечание. Если A имеет верхнюю грань, то только одну, ибо верхняя грань есть *наименьшая* из верхних границ.

Теорема 2. *Ограниченное сверху множество действительных чисел имеет верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть $A = \{a\}$ ограничено сверху и b — его верхняя граница. Запишем b:

$$b \sim b^{(-k)} b^{(-k+1)} \dots b^{(0)},\ b^{(1)} \dots$$

Числа $a \in A$ имеют не более $k+1$ знаков перед запятой. Запишем их, добавив в случае нужды нули слева:

$$a \sim a^{(-k)}a^{(-k+1)}\ldots a^{(0)},\ a^{(1)}\ldots$$

Цифры $a^{(-k)}$ элементов $\{a\}$ (т. е. цифры элементов a, стоящие в разряде элемента $b^{(-k)}$) принимают не более десяти значений: 0, 1, ..., 9. Максимальное из этих значений обозначим $c^{(-k)}$. Выберем из $\{a\}$ те элементы $A^{(-k)}$, у которых $a^{(-k)} = c^{(-k)}$. Среди $A^{(-k)}$ отберем те элементы $A^{(-k+1)}$, у которых в разряде элемента $b^{(-k+1)}$ находится максимальная цифра — обозначим ее через $c^{(-k+1)}$. Среди $A^{(-k+1)}$ отберем $A^{(-k+2)}$, у которых в разряде элемента $b^{(-k+2)}$ будет максимальная цифра ($c^{(-k+2)}$) и т. д.

Мы получим последовательность $c \sim c^{(-k)}c^{(-k+1)}\ldots$ $\ldots c^{(0)}, c^{(1)}\ldots$ (может случиться, что последовательность c имеет хвост девяток). Заметим, для дальнейшего, что $A^{(n)}$ состоит из таких чисел a, у которых

$$a^{(-k)} = c^{(-k)},\ a^{(-k+1)} = c^{(-k+1)}, \ldots, a^{(n)} = c^{(n)}.$$

Покажем, что c является верхней гранью A.

1) c является верхней границей A. Действительно, пусть $a \in A$ и $a \sim a^{(-k)}\ldots a^{(0)}, a^{(1)}\ldots$ — представление без хвоста девяток. Возможны два случая:

— либо $a \in A^{(i)}$ при всех i. Тогда $a^{(i)} = c^{(i)}$ при всех i, и, значит, $a = c$;

— либо существует такое n, что $a \in A^{(i)}$ при всех $i < n$, но $a \notin A^{(n)}$. Тогда $a^{(i)} = c^{(i)}$ при всех $i < n$, но $a^{(n)} < c^{(n)}$. И, значит, $a \leqslant c$, независимо от хвоста девяток (согласно лемме § 3).

2) c является верхней гранью A. Действительно, пусть $d < c$ и (в записи без хвоста девяток)

$$d \sim d^{(-k)}\ldots d^{(0)},\ d^{(1)}\ldots$$

Найдется такое n, что

$$d^{(i)} = c^{(i)} \text{ при всех } i < n, \text{ но } d^{(n)} < c^{(n)}.$$

Но тогда любое $a \in A^{(n)}$ будет больше d, ибо $a^{(i)} = d^{(i)}$ при всех $i < n$ и $a^{(n)} = c^{(n)} > d^{(n)}$. Так как обе последовательности $\{a^{(i)}\}$ и $\{d^{(i)}\}$ приведенные, то $a > d$.

Замечание. Если множество A не ограничено сверху, то говорят, что оно не имеет верхней грани, но пишут

$$\sup A = +\infty.$$

Упражнение. Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных. Проверить, что

$$\sup_{x, y} f(x, y) = \sup_x \sup_y f(x, y) = \sup_y \sup_x f(x, y).$$

Мы постоянно будем пользоваться следующей терминологией:

название	**обозначение**	**определение**
интервал	(a, b)	$a < x < b$
отрезок	$[a, b]$	$a \leqslant x \leqslant b$
полуинтервал	$(a, b]$	$a < x \leqslant b$
полуотрезок	$[a, b)$	$a \leqslant x < b$

и *любое* из этих множеств будем называть *промежутком*.

Теорема 3. *Убывающая последовательность отрезков $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ имеет общую точку.*

Доказательство. Пусть $I_n = [a_n, b_n]$, так что

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n.$$

Любое b_n является верхней границей $\{a_k\}$, ибо

$$\text{при } k \leqslant n \text{ имеем } a_k \leqslant a_n \leqslant b_n,$$
$$\text{при } k > n \text{ имеем } a_k \leqslant b_k \leqslant b_n.$$

В частности, существует $a = \sup a_k$. Для него

$a \geqslant a_n$ при всех n, ибо a — верхняя грань $\{a_k\}$;

$a \leqslant b_n$ при всех n, ибо a — верхняя грань, а b_n — верхняя граница для $\{a_k\}$.

Значит, $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ при всех n.

Замечание. Убывающая последовательность интервалов может не иметь общей точки. Например, $\bigcap (0, 10^{-n}) = \theta$.

Определения нижней границы и нижней грани (inf) аналогичны определениям верхней границы и верхней грани.

Лемма 2. *Любое множество неотрицательных чисел имеет нижнюю грань.*

Доказательство. Заданное множество A имеет нижнюю границу — например число 0. Пусть $B = \{b\}$ есть множество всех нижних границ A. Множество B ограничено сверху (любым $a \in A$) и, значит, существует $b' = \sup B$. Докажем, что b' — нижняя грань A.

Всякое $a \geqslant b'$, ибо a — верхняя граница, а b' — верхняя грань множества B.

Любое $b \leqslant b'$, значит, b' — наибольшая из нижних границ A.

§ 5. Отрицательные числа

Каждому (неотрицательному) числу a ставится в соответствие число $-a$ (изображаемое той же последовательностью цифр $\{a^{(i)}\}$, но со знаком минус впереди). Множество *всех* действительных чисел доупорядочивается по правилу (здесь $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ — наши старые числа без знака):

$$-0 = 0; \ -a < b, \text{ если } a \neq 0 \text{ или } b \neq 0;$$
$$-a < -b, \text{ если } a > b.$$

В дальнейшем, по определению, $-(-a) = a$. Так что $|a| = a$ (или $-a$) при $a \geqslant 0$ (при $a < 0$).

Замечание. Легко проверить, что действительные числа упорядочены: т. е. $(a < b$ и $b < c) \Rightarrow (a < c)$ для любых действительных чисел a, b, c (положительных, нуля и отрицательных).

Лемма 3. *Пусть $A = \{a\}$ — любое множество чисел.*

(1) Если существует $\sup a$, то существует $\inf(-a) = -\sup a$.

(2) Если существует $\inf a$, то существует $\sup(-a) = -\inf a$.

Доказательство. В случае (1) положим $b = \sup a$. Тогда любое $a \leqslant b$ и, значит, $-a \geqslant -b$. Если $-c > -b$, то $c < b$ и найдется $a > c$. Тогда $-a < -c$. Значит, $-b$ есть $\inf(-a)$. В случае (2) положим $b = \inf a$ и проведем аналогичное рассмотрение.

Теорема 4. *Ограниченное сверху* (*снизу*) *множество имеет верхнюю* (*нижнюю*) *грань.*

Доказательство. Если заданное множество $A = \{a\}$ имеет неотрицательные элементы, то достаточно взять их верхнюю грань. Если же A состоит лишь из отрицательных чисел, то множество $B = \{-a\}$ состоит лишь из положительных чисел и имеет нижнюю грань $b = \inf\{-a\}$. Но тогда $(-b)$ является верхней гранью для $\{A\}$.

§ 6. Арифметические действия

Мы будем предполагать, что арифметические действия $+$, $-$, $\times$ определены для конечно-значных десятичных чисел и свойства этих действий известны *). Наша задача

*) Они сводятся к действиям с целыми числами, и это известно из школы.

лишь распространить арифметические действия на действительные числа.

Определение сложения и умножения действительных чисел:

$$\left.\begin{aligned} a+b &= \sup(\alpha+\beta), \\ c\times d &= \pm\sup(\gamma\times\delta), \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где sup берутся по всем конечным дробям α, β, γ, δ, подчиненным неравенствам $\alpha\leqslant a$, $\beta\leqslant b$, $0\leqslant\gamma\leqslant|c|$, $0\leqslant\delta\leqslant|d|$. Знак $+$ $(-)$ берется, когда c и d одного знака (разных). Верхние грани в $(*)$ существуют, так как множества $\{\alpha+\beta\}$ и $\{\gamma\times\delta\}$ ограничены сверху. Первое числом $a_{(0)}+1+b_{(0)}+1$, второе — ограничено числом $(|c_{(0)}|+1)(|d_{(0)}|+1)$ (здесь $c_{(0)}$ и $d_{(0)}$ — части c и d перед запятой).

Пользуясь приведенными определениями, можно ввести для действительных чисел вычитание, деление, возведение в степень и логарифмирование. Можно установить алгебраические свойства действий. Все это читатель может найти в нижеследующем Дополнении, которое следует прочесть после усвоения основ математического анализа.

До этого мы рекомендуем пользоваться известными из школы свойствами алгебраических действий как недоказанными теоремами.

ДОБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ 2

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

В этом разделе предполагается, что читатель уже знает основы анализа; умеет доказывать, что функция, равномерно непрерывная на всюду плотном множестве, однозначно продолжается до функции, непрерывной на всей прямой.

Здесь шесть действий арифметики распространяются на действительные числа и доказываются основные свойства этих действий. Некоторые определения и свойства арифметических действий предполагаются известными и установленными для конечных десятичных дробей.

Вот основные свойства:

1) Сложение:
(1.1) $a+b=b+a$; (1.2) $(a+b)+c=a+(b+c)$;
(1.3) $a+0=a$; (1.4) $a-a=0$;

(1.5) $a+x=b$ имеет единственное решение $x=b+(-a)$;
(1.6) $y=a+x$ строго монотонна;
(1.7) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

2) Умножение
(2.1) $a\cdot b=b\cdot a$; (2.2) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;
(2.3) $0\cdot a=0$; $1\cdot a=a$;
(2.4) $y=ax$ при $a\neq 0$ строго монотонна;
(2.5) $y=ax$ при $a\neq 0$ имеет решение (единственное).

3) Сложение и умножение
(3.1) $a(b+c)=ab+ac$.

4) Степень (с основанием $\geqslant 0$; 0^0 не определено)
(4.1) $a^ba^c=a^{b+c}$; (4.2) $a^cb^c=(a\cdot b)^c$;
(4.3) $(a^b)^c=a^{bc}$;
(4.4) $a^x=b$ имеет единственное решение $(0<a\neq 1)$;
(4.5) $y=a^x$, при $0<a\neq 1$, строго монотонна.

Для конечно-значных дробей предполагается установленными:
в группе 1) — свойства (1.1) — (1.7),
в группе 2) — свойства (2.1), (2.2) и (2.4),
в группе 3) — свойства (3.1).

В группе 4) степень предполагается определенной для конечно-значного основания и натурального показателя. Для этих случаев считаются установленными (4.1) $\div$ (4.3) и (4.5).

Перейдем к изложению. К сожалению, наиболее короткий путь у нас проходит через прямое доказательство существования разности.

В этом Добавлении латинские буквы обозначают действительные числа, а *греческие — лишь конечно-значные* (кроме ε, δ, π).

1. Вспомогательные оценки. С числом a и его приведенной записью $\pm\{a^{(i)}\}$ свяжем набор укороченных чисел $a_{(n)}$, где (n — целое)

$$a_{(n)}^{(i)}=a^{(i)}\ (\text{или } 0)\ \text{при } i\leqslant n\ (\text{при } i>n),$$

и если a имело знак минус, то он ставится перед $a_{(n)}$.

Вместе с числом a мы часто будем рассматривать числа

$$a_{(n)},\ a_{(n)}-10^{-n},\ a_{(n)}+10^{-n}.$$

Это удобно, так как числа эти — конечно-значные и действия $+$, $-$, $\times$ для них известны.

Запись 10^{-n} обозначает число $0,0\ldots01$ (всего n нулей, n — натуральное).

Лемма 1. *Для любых a и n* (a —действительное, n — натуральное) *имеем*

$$a_{(n)}-10^{-n}\leqslant a\leqslant a_{(n)}+10^{-n}. \qquad (*)$$

Действительно, при $a\geqslant 0$ это следует из определения сравнения. Если же $a<0$, то введем $b=-a>0$ и для него получим

$$b_{(n)}-10^{-n}\leqslant b\leqslant b_{(n)}+10^{-n}.$$

Но поскольку $b = -a$, $b_{(n)} = -a_{(n)}$ и действия с конечно-значными числами известны, то $-a_{(n)} - 10^{(n)} \leqslant -a \leqslant -a_{(n)} + 10^{-n}$. Меняя знак во всех частях неравенств, получаем (*).

Лемма 2. *Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность, x и y — числа, а m — цифра. Если при всех $n = 1, 2, \ldots,$ будет*

$$\nu_n - m \cdot 10^{-n} \leqslant x \leqslant y \leqslant \nu_n + m \cdot 10^{-n},$$

то $x = y$.

Действительно, при $x < y$ нашлись бы α и β, для которых $x \leqslant \alpha < \beta \leqslant y$, и тогда

$$\nu_n - m \cdot 10^{-n} \leqslant \alpha < \beta \leqslant \nu_n + m \cdot 10^{-n}.$$

Отсюда $0 < \beta - \alpha \leqslant (2m) \cdot 10^{-n}$. Следовательно, $\beta - \alpha = 0$, вопреки выбору этих чисел (заметим, что $\beta - \alpha$ определено и все действия законны, ибо α, β, ν_n — конечно-значные).

Лемма 3. $a = \sup \alpha$ *по всем* $\alpha \leqslant a$.

Действительно,

$$a_{(n)} - 10^{-n} \leqslant \sup_{\alpha \leqslant a} \alpha \leqslant a \leqslant a_{(n)} + 10^{-n}.$$

2. **Сложение.** Положим

$$a \oplus b = \sup (\alpha + \beta) \text{ по всем } \alpha \leqslant a \text{ и } \beta \leqslant b.$$

Поскольку для конечно-значных чисел сложение монотонно, то

$$\mu \oplus \nu = \sup_{\alpha \leqslant \mu,\ \beta \leqslant \nu} (\alpha + \beta) = \mu + \nu,$$

и мы можем вместо $\oplus$ по-прежнему писать $+$.

Лемма 4. *Сложение слабо монотонно, т. е.*

если $a_1 \leqslant a_2$ и $b_1 \leqslant b_2$, то $a_1 + b_1 \leqslant a_2 + b_2$.

Действительно,

$$a_1 + b_1 = \sup_{\alpha \leqslant a_1,\ \beta \leqslant b_1} (\alpha + \beta) \leqslant \sup_{\alpha \leqslant a_2,\ \beta \leqslant b_2} (\alpha + \beta) = a_2 + b_2.$$

Теперь нетрудно доказать основные свойства сложения.

(1) $a + b = b + a$. Это следует из определения.

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Доказательство. Из слабой монотонности имеем

$$a_{(n)} + b_{(n)} + c_{(n)} - 3 \cdot 10^{-n} \leqslant (a + b) + c \leqslant$$
$$\leqslant a_{(n)} + b_{(n)} + c_{(n)} + 3 \cdot 10^{-n},$$
$$a^{(n)} + b_{(n)} + c_{(n)} - 3 \cdot 10^{-n} \leqslant a + (b + c) \leqslant$$
$$\leqslant a_{(n)} + b_{(n)} + c_{(n)} + 3 \cdot 10^{-n}.$$

Отсюда, по лемме 2, получается равенство (2).

(3) $a+0=a$, ибо по лемме 3 и слабой монотонности

$$a+0=\sup_{\alpha\leqslant a,\ \beta\leqslant 0}(\alpha+\beta)=\sup_{\alpha\leqslant a}(\alpha+0)=a.$$

Определим *вычитание*, полагая $b-a=b+(-a)$.

(4) $a-a=0$. Действительно, по слабой монотонности

$$(a_{(n)}-10^{-n})+(-a_{(n)}-10^{-n})\leqslant a-a\leqslant(a_{(n)}+10^{-n})+\\+(-a_{(n)}+10^{-n}),$$

$$-2\cdot 10^{-n}\leqslant a-a\leqslant 2\cdot 10^{-n},$$

и, значит, число $a-a=0$.

(5) Уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение $x=b-a$.

Действительно, благодаря коммутативности и ассоциативности $a+(b-a)=b+0=b$. Наоборот, если x — решение, т. е. $a+x=b$, то $-a+a+x=-a+b$ и $0+x=b-a$, $x=b-a$.

(6) Функция $y=a+x$ строго монотонна. Действительно, она слабо монотонна и не повторяет своих значений.

(7) Если $b>a$, то $b-a>0$ и обратно. Действительно, при $b>a$ из строгой монотонности следует: $b-a>a-a=0$. Наоборот, если $b-a>0$, то $a<a+b-a=b$.

Наконец, неравенство $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ проверяется для случаев различных сочетаний знаков. Например, для $|a|\geqslant|b|$ и a и b разных знаков имеем $|a+b|=||a|-|b||\leqslant|a|\leqslant|a|+|b|$.

Отсюда вытекает, что $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

Лемма 5. *Пусть заданы действительное* $\varepsilon>0$ *и натуральное* N. *Найдется конечно-значное* $\delta>0$, *для которого* $N\cdot\delta<\varepsilon$.

Действительно, возьмем натуральные m и n такими, чтобы было $10^{-m}<\varepsilon$ и $10^n>N$. Тогда для $\delta=10^{-(m+n)}$ будет $N\cdot\delta<10^n\,\delta=10^{-m}<\varepsilon$.

Теорема 1. *Функции* $z=x\pm y$ *равномерно непрерывны по совокупности аргументов.*

Действительно, для любого $\varepsilon>0$ найдется δ $(0<\delta+\delta<\varepsilon)$ такое, что

$$(|\Delta x|<\delta,\quad|\Delta y|<\delta)\Rightarrow|\Delta z|=|\Delta x\pm\Delta y|\leqslant|\Delta x|+|\Delta y|<\varepsilon$$

(здесь ε — действительное число).

3. Умножение.

Теорема 2. *Функция* $\varphi(\alpha,\beta)=\alpha\cdot\beta$ *равномерно непрерывна в любой ограниченной области.*

Доказательство. Для конечно-значных $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ имеем

$$\Delta\varphi=(\alpha+\Delta\alpha)(\beta+\Delta\beta)-\alpha\beta=\alpha\cdot\Delta\beta+\beta\cdot\Delta\alpha+\Delta\alpha\cdot\Delta\beta.$$

Пусть задано натуральное N и $\varepsilon>0$. Найдем конечно-значное $0<\delta<1$, для которого $3N\cdot\delta<\varepsilon$. Тогда

$$\left.\begin{matrix}|\Delta\alpha|<\delta,\ |\Delta\beta|<\delta\\|\alpha|<N,\ |\beta|<N\end{matrix}\right\}\Rightarrow|\Delta\varphi|\leqslant N\cdot\delta+N\cdot\delta+1\cdot\delta\leqslant(2N+1)\,\delta<\varepsilon.$$

Определение произведения. Продолжим по непрерывности $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta$ на всю плоскость Oxy и обозначим получившуюся функцию через $x \cdot y$ *).

Замечание. Так как $1 \cdot \alpha = \alpha$, то $1 \cdot x = x$.

Теорема 3. *Умножение ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно.*

Доказательства всех трех свойств проводятся одинаково. Введем $f_1(x, y) = xy - yx$; $f_2(x, y) = (xy)z - x(y, z)$; $f_3(x, y) = x(y + z) - (xy + xz)$. Эти функции непрерывны по совокупности своих аргументов. Они обращаются в нуль на всюду плотном множестве конечно-значных $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$. Поэтому

$$f_1(x, y) \equiv f_2(x, y, z) \equiv f_3(x, y, z) \equiv 0.$$

Лемма 6. *Если $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$, то $x_0 \cdot y_0 > 0$.*

Доказательство. Возьмем $0 < \mu < x_0$, $0 < \eta < y_0$. Тогда

$$x_0 \cdot y_0 \geqslant \inf_{x \geqslant \mu,\ y \geqslant \eta} (x \cdot y) = \inf_{\alpha \geqslant \mu,\ \beta \geqslant \eta} (\alpha \cdot \beta) = \mu \cdot \eta > 0.$$

Теорема 4. *$y = ax$ при $a \neq 0$ монотонна, непрерывна и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.*

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$, тогда $ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) > 0$ при $a > 0$ (и < 0 при $a < 0$).

$y = ax$ принимает сколь угодно большие и сколь угодно малые (отрицательные) значения. Пусть N — натуральное, $|a| > 10^{-n}$ и $x_{1,2} = \pm N \cdot 10^n$. Тогда $|ax_{1,2}| \geqslant 10^{-n} N 10^n = N$, причем ax_1 и ax_2 имеют разные знаки. Произведение $y = a \cdot x$ непрерывно по совокупности аргументов (a и x), а значит и по переменному x. Поэтому $y = a \cdot x$ принимает все значения (при $a \neq 0$).

Следствие 1. $y = ax$ при $a \neq 0$ имеет обратную монотонную и непрерывную функцию, *которая обозначается* $x = y/a$. Она определена всюду; тем самым введено *деление*. Для него

$$x = (ax)/a; \quad y = a \cdot (y/a) \text{ при всех } x, y \text{ и } a \neq 0.$$

Следствие 2. Уравнение $b = ax$ при $a \neq 0$ имеет решение $x = b/a$. Это решение единственное (ибо $y = ax$ монотонна). Если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$. Наконец, $a \cdot 1 = a$, откуда $a/a = 1$ и $a/1 = a$.

4. Несколько полезных формул. Мы определили сложение и умножение действительных чисел. Доказали коммутативность и ассоциативность этих действий и дистрибутивность сложения относительно умножения. Доказано, что уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $x = b + (-a)$, и что уравнение $ax = b$ имеет при $a \neq 0$ единственное решение, которое обозначено $x = b/a$. Поэтому равносильны равенства:

$$a = b, \quad ca = cb, \quad a/c = b/c \quad (\text{при } c \neq 0).$$

---

*) По этому определению $xy = \lim(\alpha\beta)$ при $\alpha \to x$ и $\beta \to y$. Почему бы не ввести так сложение? Потому, что равномерную непрерывность мы определили с помощью вычитания.

Отсюда совершенно формально выводятся правила действий с выражениями вида b/a, числители и знаменатели которых — любые действительные (а не только целые) числа. Знаменатели, разумеется, должны быть отличны от нуля. Вот эти правила: $a \cdot (b/a) = b$ (по определению);

$$(1)\quad \frac{b_1}{a_1} \pm \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_2 b_1 \pm a_1 b_2}{a_1 a_2}; \qquad (2)\quad \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1 \cdot b_2}{a_1 \cdot a_2};$$

$$(3)\quad u : \frac{b}{a} = u \cdot \frac{a}{b}; \text{ в частности, } \frac{b \cdot c}{a \cdot c} = \frac{b}{a}.$$

Доказываются формулы последовательно, но доказательства очень похожи — обе части доказываемого равенства умножаются на «знаменатель»:

$$(1)\quad a_1 \cdot a_2 \left(\frac{b_1}{a_1} \pm \frac{b_2}{a_2}\right) = \left(\frac{a_2 b_1 \pm a_1 b_2}{a_1 a_2}\right) \cdot a_1 a_2,$$

$$a_2 \cdot a_1 \frac{b_1}{a_1} \pm a_1 a_2 \frac{b_2}{a_2} = a_2 b_1 \pm a_1 b_2,$$

$$a_2 b_1 \pm a_1 b_2 = a_2 b_1 \pm a_1 b_2.$$

$$(2)\quad a_1 a_2 \cdot \left(\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2}\right) = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} \cdot a_1 a_2,$$

$$a_1 \frac{b_1}{a_1} \cdot a_2 \frac{b_2}{a_2} = b_1 b_2; \quad b_1 b_2 = b_1 b_2.$$

$$(3)\quad \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{u}{(b/a)}\right) = \frac{b}{a} \cdot \left(u \cdot \frac{a}{b}\right); \quad u = u \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}; \quad u = u.$$

5. Рациональные числа.

> Действия над двадцать вторыми и тридцать седьмыми долями являются мучением, которому учителя подвергают двенадцатилетних детей из чистого садизма, без всякой надобности, могущей сыграть роль смягчающего обстоятельства.
>
> *Лебег*

Целые числа являются действительными, значит, действительными являются и все рациональные числа m/n, т. е. корни уравнений $nx = m$ с целыми коэффициентами ($n \neq 0$). Правила действий, определенные для действительных чисел, удовлетворяют формулам раздела 4 и, следовательно, для рациональных чисел дают те же результаты, что и действия, определенные в школе.

6. Степень.

1) Степень с целым показателем.

$$a^n = a \ldots a \; (n \text{ раз}) \text{ при } n > 0,$$
$$a^0 = 1 \; (a \neq 0),$$
$$a^n = 1 / a^{-n} \text{ при } n < 0 \; (a \neq 0).$$

Для степени, определенной таким образом, непосредственно проверяются (4.1) — (4.3) при целом показателе.

Лемма 7. *$f(x) = x^n$ строго монотонна, при $x > 0$ и целом $n \neq 0$.*

Действительно, пусть $n > 0$. (По индукции): если $0 < x_1 < x_2$, то $0 < x_1^2 < x_1 x_2 < x_2^2$, $0 < x_1^3 < x_1^2 x_2 < x_2^3$ и т. д.

Если целое $n > 0$, то $x^n > x$ при $x > 1$, и $x^n < x$ при $0 < x < 1$. Если же целое $n < 0$, то $x^n < 1/x$ при $x > 1$, и $x^n > 1/x$ при $0 < x < 1$. Таким образом:

Для целого $n \neq 0$ функция $y = x^n$ при $x > 0$ — строго монотонна, непрерывна и *принимает все значения $y > 0$.*

2) Корень с целым показателем. Функция $x = y^{1/n}$, обратная к $y = x^n$, монотонна, непрерывна и определена при всех $y > 0$. Для нее

$$(x^{1/n})^n = (x^n)^{1/n} = x \quad (\text{целое } n \neq 0,\ x > 0).$$

Заметим для дальнейшего, что $x^{1/1} = x$.

3) Степень с рациональным показателем. Пусть $k/l = m/n$ и $x > 0$. Рассмотрим $y_1 = (x^k)^{1/l}$ и $y_2 = (x^m)^{1/n}$. Для них

$$y_1^l = x^k,\ y_2^n = x^m,$$

$$y_1^{lm} = x^{km} = x^{mk} = y_2^{nk}.$$

Но $lm = nk$ и в силу монотонности функции $f(y) = y^p$ получаем $y_1 = y_2$. Значит, $(x^m)^{1/n}$ зависит лишь от отношения m/n (а не от самих m и n).

Поэтому вводим обозначение для *степени с рациональным показателем*:

$$x^{m/n} = (x^m)^{1/n}.$$

Замечание. $(a^{m/n})^n = ((a^m)^{1/n})^n = a^m$, в частности,

$$a^{m/1} = (a^{m/1})^1 = a^m \text{ и } a^{1/1} = a^1 = a.$$

Благодаря монотонности функций, равносильны равенства $a^n = b^n$, $a = b$, $a^{1/n} = b^{1/n}$. Отсюда выводятся три формулы:

$$(1) \qquad (a^{k/l})^{m/n} = a^{(km)/(ln)};$$

$$(2) \qquad (ab)^{m/n} = a^{m/n} b^{m/n};$$

$$(3) \qquad a^{k/l} a^{m/n} = a^{(k/l)+(m/n)}.$$

Доказываются они последовательно, но одинаково — возведением обеих частей равенства в степень «знаменателя». При этом используется «замечание» и правила сложения и умножения «дробных выражений»:

$$(1)\ ((a^{k/l})^{m/n})^{nl} = (a^{(km)/(ln)})^{nl},$$

$$(a^{k/l})^{lm} = a^{km}, \quad a^{km} = a^{km}.$$

$$(2)\quad ((ab)^{m/n})^{n} = (a^{m/n} \cdot b^{m/n})^{n},$$

$$(ab)^{m} = (a^{m/n})^{n} \cdot (b^{m/n})^{n}, \qquad (ab)^{m} = a^{m}b^{m}.$$

$$(3)\ (a^{k/l} \cdot a^{m/n})^{nl} = (a^{k/l+m/n})^{nl},$$

$$(a^{k/l})^{nl} \cdot (a^{m/n})^{nl} = a^{(k/l+m/n)\,nl},$$

$$a^{kn} \cdot a^{ml} = a^{kn+lm}.$$

Лемма 8. $\varphi(\alpha) = a^{\alpha}$ *является монотонной функцией от* α (при $0 < a \neq 1$).

Доказательство. При $b < 1$ и натуральном n будет $b^{n} < 1$. Поэтому для обратной функции $a^{1/n}$ при $a > 1$ будет $a^{1/n} > 1$. Отсюда $a^{m/n} > 1$. Теперь для $a > 1$ и $\alpha < \beta$ находим

$$a^{\beta}/a^{\alpha} = a^{\beta-\alpha} > 1 \text{ и } a^{\beta} > a^{\alpha}.$$

При $a < 1$ и $\alpha < \beta$ получаем $a^{\beta}/a^{\alpha} = a^{\beta-\alpha} = (1/a)^{\alpha-\beta} < 1$.

4) Степень с действительным показателем.

Лемма 9. $a^{1/n} \to 1$ *при* $n \to \infty$ *для каждого* $a \geqslant 1$.

Доказательство. Положим

$$a^{1/n} = 1 + h.$$

Тогда $h \geqslant 0$ и

$$a = (1 + h)^{n} \geqslant 1 + nh.$$

Отсюда

$$0 \leqslant h \leqslant (a - 1)/n \to 0$$

при $n \to \infty$.

Теорема 5. *Функция* $\varphi(\alpha) = a^{\alpha}$ *равномерно непрерывна на любом отрезке* ($a > 0$ и фиксировано).

Доказательство. Пусть $\alpha < \beta$ — две точки отрезка $[-N, N]$, находящиеся на расстоянии $\beta - \alpha < 1/n$. В обоих случаях ($a \geqslant 1$ или $0 < a < 1$) при $n \to \infty$ соответственно получаем

$$0 \leqslant a^{\beta} - a^{\alpha} = a^{\alpha}(a^{\beta-\alpha} - 1) < a^{N} \cdot (a^{1/n} - 1) \to 0,$$

$$0 \leqslant a^{\alpha} - a^{\beta} = a^{\beta}\ (a^{\alpha-\beta} - 1) < a^{-N} \cdot ((1/a)^{1/n} - 1) \to 0.$$

Определение. Продолжая $\varphi(\alpha) = a^{\alpha}$ по непрерывности, получаем *показательную* функцию $\varphi(x) = a^{x}$, монотонную и непрерывную при всех x, для любого $a > 0$ (при $a = 0$ функция определена только для $x > 0$).

Степень обладает двумя свойствами:

$$(ab)^{x} = a^{x}b^{x} \text{ и } a^{x+y} = a^{x} \cdot a^{y}.$$

Для доказательства замечаем, что разность между правой и левой частью непрерывна по обеим переменным x и y и обращается в нуль на дважды конечно-значных точках (α, β).

Определение. *Степенной* функцией называется $y = x^a$. Она определена для всех $x > 0$ всегда (а кроме того, для $x = 0$ при $a > 0$ и для $x < 0$ при натуральном a).

$y = x^a$ непрерывна. Действительно, при $x > 0$ имеем $(|\Delta x| < x)$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^a - x^a = x^a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1\right].$$

Для a, заключенного в пределах $-N \leqslant a \leqslant N$, в силу монотонности показательной функции $(\Delta x > 0)$,

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{-N} \leqslant \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a \leqslant \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^N.$$

Оба граничных значения стремятся к 1 при $\Delta x \to 0$. Значит, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. При $\Delta x < 0$ выкладки аналогичны.

Если же $x = 0$, то для $0 < a \leqslant N$ при $\Delta x > 0$ имеем

$$\Delta y = (\Delta x)^a \leqslant (\Delta x)^N \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Из непрерывности степенной и показательной функций вытекает непрерывность их суперпозиции $z = (a^x)^y$ по обоим переменным x и y. Благодаря этому формула

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

распространяется с конечно-значных (x, y) на все действительные.

7. Логарифм. Монотонная непрерывная функция $y = a^x$ имеет обратную, обозначаемую $x = \log_a y$. Обратная определена при $y > 0$ для $a > 0$, ибо $\varphi(\alpha) = a^\alpha$ принимала сколь угодно большие и сколь угодно малые (положительные) значения. Таким образом $(a > 0)$:

$$x = \log_a a^x \quad \text{при любом } x,$$
$$x = a^{\log_a x} \quad \text{при } x > 0.$$

Поэтому

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$
$$x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x}.$$

Логарифмируя эти равенства, получаем

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y,$$
$$\log_a (x^y) = y \log_a x,$$
$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y.$$

Наконец, логарифмируя тождество $x = a^{\log_a x}$, получаем $\log_b x = (\log_a x) \log_b a$ и $\log_a x = (\log_b x)/(\log_b a)$.

8. Другие способы определения действительных чисел.

> **Аксиоматическое определение обладает теми же преимуществами перед построением, что и воровство перед честным трудом.**
>
> *Рассел*

В некоторых руководствах действительные числа строятся аксиоматически. Именно —

объявляется, что действительные числа — это упорядоченное множество элементов, для которых определены операции сложения и умножения, обладающие всеми агебраическими свойствами и существованием точной верхней грани у ограниченного множества.

Зато после этого остальные свойства доказываются совершенно строго.

Этот путь страдает двумя недостатками:

— его строгие доказательства состоят в сведении более очевидного к менее очевидному *);

— остается недоказанным, что существует множество с нужными свойствами (т. е. множество действительных чисел).

В большинстве руководств действительные числа вводят «сечениями» Дедекинда. Этот путь представляется нам не только менее наглядным, что самое важное (десятичная дробь нагляднее сечения), но и более длинным. В руководстве Э. Ландау, написанном столь же подробно, как и наше, соответствующий материал излагается в три раза длиннее.

В некоторых руководствах, следуя Кантору, действительные числа вводят с помощью фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Мы следуем почти по этому пути, но все же выгадываем в наглядности и, может быть, в краткости.

Таковы причины, побудившие меня изложить это построение действительных чисел, опирающееся на *позиционную* систему счисления, далекую Греческой математике. Другая черта нашего построения состоит в широком использовании продолжения функции, равномерно непрерывной на всюду плотном множестве (или заданной на всюду плотном множестве, но имеющей нулевое колебание во всех точках). Мне кажется, что мы при этом выполнили программу, намеченную Лебегом и частично развитую Валле-Пуссеном.

В одном пункте у нас все же осталось сомнение. В угоду краткости, может быть мнимой, мы ввели сумму чисел как верхнюю грань. Другой путь состоит в рассмотрении сумм укороченных чисел $c_{(n)} = a_{(n)} + b_{(n)}$ и замечании, что при увеличении n любой фиксированный разряд $i \leqslant n$ числа $c_{(n)}$ может смениться лишь однажды. Это дает прямое определение суммы $a + b$.

---

*) Например, равенство $\lim x^2 = a^2$ при $x \to a$ сводят к дистрибутивности произведения действительных чисел.

ГЛАВА 3

МЕРА ЛЕБЕГА

К моменту чтения этой главы читатель должен знать теорию точечных множеств на прямой: уметь обращаться с замкнутыми и открытыми множествами, знать лемму Гейне — Бореля.

Все построение проводится для множеств на прямой, но автоматически переносится на n-мерное пространство. В этой главе

l — всегда обозначает интервал,
F или $\mathscr{F}$ — замкнутые множества,
G или $\mathscr{G}$ — открытые множества,
F_σ — объединение счетного числа замкнутых,
G_δ — пересечение счетного числа открытых.

§ 1. Внешняя мера

Определение. *Внешней мерой* $\bar{\mu}E$ множества E называется нижняя грань суммы длин системы интервалов, покрывающей E.

Иначе говоря: пусть $\mathscr{L} = \{l\}$ — система интервалов l. Тогда

$$\bar{\mu}E = \inf \sum \text{длина } l, \tag{1}$$

где Σ берется по всем $l \in \mathscr{L}$, а $\inf$ берется по всем системам $\mathscr{L}$, покрывающим E; случай $\bar{\mu}E = \infty$ не исключен.

Сделаем несколько замечаний.

1) $\bar{\mu}\mathscr{E}$ определена для любого E, ибо система $\mathscr{L}$, состоящая из одного интервала $(-\infty, +\infty)$, покрывает любое E.

2) Из определения нижней грани получаем:

(1) Для всякой системы $\mathscr{L} = \{l\}$, покрывающей E, будет $\Sigma(\text{длина } l) \geqslant \bar{\mu}E$.

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathscr{L}$, покрывающая E, для которой

$$\Sigma \text{ длина } l \leqslant \bar{\mu}E + \varepsilon$$

($\leqslant$ вместо $<$ поставлено на случай $\bar{\mu}E = \infty$).

3) В определении $\bar{\mu}E$ рассматриваются не более чем счетные системы $\mathscr{L}$. Несчетную систему $\mathscr{L} = \{l\}$ рассматривать излишне, ибо в ней, для некоторого $n = 1, 2, \ldots$, должно найтись бесконечное

множество интервалов l длины $>1/n$. И тогда Σ (длина l) $=\infty$, как бы ни была определена Σ для несчетного множества слагаемых.

4) Внешняя мера ограниченного множества конечна — она не превосходит длины любого интервала, на котором расположено E.

Примеры. Внешняя мера пустого множеста равна нулю; внешняя мера множества, состоящего из одной точки, равна нулю:

$$\bar{\mu}\theta = 0, \quad \bar{\mu}\{\cdot\} = 0,$$

ибо при любом $\varepsilon > 0$ будет: $\bar{\mu}\{x\} \leqslant$ длина $(x-\varepsilon, x+ +\varepsilon) = 2\varepsilon$.

Теорема 1. Монотонность. *Если* $E \subseteq H$, *то* $\bar{\mu}E \leqslant \bar{\mu}H$.

Доказательство. Всякая система $\mathscr{L}$, покрывающая H, покрывает и E.

Теорема 2. Счетная полуаддитивность: $\bar{\mu}\bigcup\limits_1^\infty E_k \leqslant \sum\limits_1^\infty \bar{\mu}E_k$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем последовательность $\varepsilon_k > 0$ и $\Sigma\varepsilon_k < \varepsilon$. Каждое E_k можно покрыть системой $\mathscr{L}_k = \{l_k\}$, у которой

$$\Sigma \text{ длина } l_k \leqslant \bar{\mu}E_k + \varepsilon_k.$$

Тогда $\mathscr{L} = \bigcup \mathscr{L}_k$ покроет $\bigcup E_k$ и, значит,

$$\bar{\mu}\bigcup E_k \leqslant \sum \text{длина } l \leqslant \sum_k \sum_{k\in\mathscr{L}_k} \text{длина } l_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum [\bar{\mu}E_k + \varepsilon_k] = \sum \bar{\mu}E_k + \sum \varepsilon_k \leqslant \sum \bar{\mu}E_k + \varepsilon.$$

Произвольность $\varepsilon > 0$ доказывает теорему.

Следствие. *Если* $\mu H = 0$, *то* $\bar{\mu}(E \pm H) = \bar{\mu}E$.

Действительно,

$$\bar{\mu}E \leqslant \bar{\mu}(E+H) \leqslant \bar{\mu}E + \bar{\mu}H = \bar{\mu}E + 0,$$

и аналогично $E \subseteq (E \setminus H) + H$,

$$\bar{\mu}E \leqslant \bar{\mu}((E\setminus H) + H) \leqslant \bar{\mu}(E\setminus H) \leqslant \bar{\mu}E.$$

Следствие. *Внешняя мера счетного множества точек равна нулю*:

$$\bar{\mu}\{a_1, a_2, \ldots\} \leqslant \bar{\mu}a_1 + \bar{\mu}a_2 + \ldots = 0.$$

Т е о р е м а 3. $\overline{\mu}\,[a,\,b] = b - a$ (где $a \leqslant b$).

Д о к а з а т е л ь с т в о: $\overline{\mu}\,[a,\,b] = \overline{\mu}\,(a,\,b) \leqslant b - a$. Пусть $\mathscr{L} = \{l\}$ покрывает $[a,\,b]$, и $s = \Sigma$ длина l. По лемме Гейне — Бореля из $\mathscr{L}$ можно выбрать конечное число интервалов $\{l_k\}$, покрывающих $[a,\,b]$. Занумеруем все концы интервалов $\{l_k\}$ в порядке их следования (слева направо):

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p.$$

Тогда $\alpha_0 < a < b < \alpha_p$. Далее, каждый интервал l_k подразделяется на сумму некоторых интервальчиков $(\alpha_{i-1},\ \alpha_i)$ и, значит,

$$\sum_k \text{длина } l_k = \sum_{i=1}^{p} t_i \cdot (\alpha_i - \alpha_{i-1}),$$

где $t_i \geqslant 1$ — число, показывающее во сколько интервалов l_k входит интервальчик $(\alpha_{i-1},\ \alpha_i)$. Значит,

$$s \geqslant \sum \text{длина } l_k = \sum t_i (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \geqslant \sum (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_p - \alpha_0 > b - a.$$

Т е о р е м а 4. *Конгруэнтные множества имеют равные внешние меры* *).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество E^* получается из E некоторым движением. Если система $\mathscr{L} = \{l\}$ покрывает E, то система $\mathscr{L}^* = \{l^*\}$ (получающаяся из $\mathscr{L}$ тем же движением) покрывает E^* и Σ длина $l^* = \Sigma$ длина l. Следовательно, $\overline{\mu}E^* \leqslant \overline{\mu}E$. А так как E и E^* можно здесь обменять местами, то $\overline{\mu}E^* = \overline{\mu}E$.

§ 2. Измеримость (определение Каратеодори)

О п р е д е л е н и е. *E измеримо, если для всякого A*

$$\overline{\mu}A = \overline{\mu}\,(A \cdot E) + \overline{\mu}\,(A \diagdown E); \qquad (*)$$

случаи $\overline{\mu}A = \infty$ и $\overline{\mu}E = \infty$ не исключены. Для измеримых множеств внешняя мера называется *мерой* и обозначается μE.

---

*) Множества A и B конгруэнтны, если их можно совместить передвигая как твердые тела.

Для выкладок вместо разности удобнее пользоваться пересечением и писать равенство (*) в виде

$$\bar{\mu} E = \bar{\mu}(AE) + \bar{\mu}(A \cdot CE).$$

Замечание 1. Множества E и CE измеримы одновременно.

Замечание 2. Для измеримости E необходимо и достаточно условие: для всякого A

$$\bar{\mu} A \geqslant \bar{\mu}(AE) + \bar{\mu}(A \cdot CE),$$

ибо всегда $\bar{\mu} A = \bar{\mu}(AE + A \cdot CE) \leqslant \bar{\mu}(AE) + \bar{\mu}(A \cdot CE)$.

Теорема 1. *Если* $\bar{\mu} E = 0$, *то* E *измеримо*:

$$\bar{\mu}(AE) + \bar{\mu}(A \cdot CE) \leqslant 0 + \bar{\mu} A.$$

Следствие. *Измеримы: пустое множество, конечное, счетное.*

Теорема 2. *Добавление (удаление) множества меры нуль не меняет измеримости.*

Доказательство. Пусть $\mu H = 0$, а E измеримо. Тогда

$$\bar{\mu}[A(E \pm H)] + \bar{\mu}[A \cdot C(E \pm H)] = \bar{\mu}(AE) + \bar{\mu}(A \cdot CE) = \bar{\mu} A,$$

ибо $C(E \pm H) = CE \mp H$.

Теорема 3. *Любой отрезок* $[a, b]$ *измерим.*

Доказательство. Для каждого A и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\mathcal{L}$, что $\mathcal{L}$ покрывает A и Σ длина $l \leqslant \bar{\mu} A + \varepsilon$. Выколем в интервалах l точки a, b и разобьем получившиеся интервалы на $\{l_1\}$, заключенные в (a, b), и остальные — $\{l_2\}$.

$$\bar{\mu}[A \cdot (a, b)] + \bar{\mu}[A \cdot C[a, b]] \leqslant \sum \text{длина } l_1 + \sum \text{длина } l_2 = \sum \text{длина } l \leqslant \bar{\mu} A + \varepsilon.$$

И, так как $\varepsilon > 0$ — любое, то

$$\bar{\mu}(A \cdot [a, b]) + \bar{\mu}(A \cdot C[a, b]) \leqslant \bar{\mu} A.$$

Следствие. *Измеримы:* $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b).

Теорема 4. *Если* E *и* H *измеримы, то измеримо* $S = E + H$.

Доказательство:

$$\overline{\mu}(A\cdot CS)=\overline{\mu}(A\cdot CE\cdot CH),$$

$$\overline{\mu}(AS)=\overline{\mu}(AS\cdot E)+\overline{\mu}(AS\cdot CE)=\overline{\mu}(AE)+\overline{\mu}(A\cdot CE\cdot H),$$

$$\overline{\mu}(AS)+\overline{\mu}(A\cdot CS)=\overline{\mu}(AE)+\overline{\mu}(A\cdot CE)=\overline{\mu}A.$$

Следовательно, измеримо объединение конечного числа измеримых множеств. Измеримо их пересечение (ибо его дополнение равно объединению дополнений). Измерима разность измеримых множеств.

Лемма. *Если E и H измеримы и $EH=\theta$, то при любом A:*

$$\overline{\mu}[A(E+H)]=\overline{\mu}[A(E+H)\cdot E)+\overline{\mu}[A(E+H)\cdot CE]=$$
$$=\overline{\mu}(AE)+\overline{\mu}(AH).$$

Лемма. *Если $E_1, \ldots, E_n$ измеримы и не налегают, то*

$$\mu[A\bigcup_1^n E_k]=\mu(AE_1)+\mu[A\bigcup_2^n E_k]=\ldots=\sum_1^n\mu(AE_k).$$

Теорема 5. *Если $E_1, E_2, \ldots$ измеримы и не налегают, то $\bigcup\limits_1^\infty E_k$ измеримо и $\mu\bigcup\limits_1^\infty E_k=\sum\limits_1^\infty\mu E_k$.*

Доказательство. При любом n имеем

$$\overline{\mu}A=\mu(A\bigcup_1^n E_k)+\overline{\mu}(A\cdot C\bigcup_1^n E_k)\geqslant\sum_1^n\overline{\mu}(AE_k)+$$
$$+\overline{\mu}(A\cdot C\bigcup_1^\infty E_k);$$

$$\overline{\mu}A\geqslant\sum_1^\infty\overline{\mu}(AE_k)+\overline{\mu}(A\cdot C\bigcup_1^\infty E_k)\geqslant\overline{\mu}(A\cdot\bigcup_1^\infty E_k)+$$
$$+\overline{\mu}(A\cdot C\bigcup_1^\infty E_k)\geqslant\overline{\mu}A.$$

Значит, $\bigcup\limits_1^\infty E_k$ измеримо. Беря, в частности, $A=\bigcup\limits_1^\infty E_k$, имеем

$$\overline{\mu}\bigcup_1^\infty E_k=\sum_1^\infty\mu E_k.$$

Т е о р е м а 6. *Если* $E_1, E_2, \ldots$ *измеримы, то измеримо*

$$\bigcup_1^\infty E_k = E_1 + [E_2 \setminus E_1] + [E_3 \setminus (E_1 + E_2)] + \ldots .$$

Действительно, слагаемые — измеримые неналегающие множества.

Т е о р е м а 7. *Если* $E_1, E_2, \ldots$ *измеримы, то измеримо* $\bigcap\limits_1^\infty E_k$.

Действительно, $C \bigcap\limits_1^\infty E_k = \bigcup\limits_1^\infty CE_k$.

Т е о р е м а 8. *Если* $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$, *где все* S_n *измеримы, то*

$$\mu \bigcup_1^\infty S_n = \lim \mu S_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\bigcup S_n = S_1 + (S_2 \setminus S_1) + \ldots$; $S_0 = \theta$.

$$\mu \bigcup_1^\infty S_n = \sum_1^\infty \mu (S_k \setminus S_{k-1}) = \lim \sum_1^n \mu (S_k \setminus S_{k-1}) =$$

$$= \lim \mu \bigcup_1^n (S_k \setminus S_{k-1}) = \lim \mu S_n.$$

Т е о р е м а 9. *Если* $R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots$, *где все* R_n *измеримы, и* $\mu R_1 < \infty$, *то* $\mu \bigcap R_n = \lim \mu R_n$.

Действительно, $R = \bigcap R_n$ и $R_1 \setminus R = \bigcup (R_1 \setminus R_n)$. Отсюда $\mu (R_1 \setminus R) = \lim \mu (R_1 \setminus R_n)$ и

$$\mu R_1 - \mu R = \lim (\mu R_1 - \mu R_n) = \mu R_1 - \lim \mu R_n.$$

З а м е ч а н и е. Без ограничения $\mu R_1 < \infty$ теорема становится неверной, как показывает пример $R_n = (n, \infty)$, в котором $\mu R_n = \infty$, но $\mu \bigcap R_n = \mu \theta = 0$.

Итак: измеримы интервалы, отрезки, G, F, G_δ, F_σ, ...

Т е о р е м а 10. $\mu G = \Sigma$ (длина g) *по всем интервалам* g *смежности* G.

Л е м м а. *Если* E_1 *и* E_2 *измеримы, то*

$$\mu E_1 + \mu E_2 = \mu (E_1 + E_2) + \mu (E_1 \cdot E_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

$$\mu E_1 + \mu E_2 = \mu E_1 + \mu (E_2 \setminus E_1) + \mu (E_1 E_2).$$

§ 3. Аппроксимации по внешней мере

Л е м м а. $\bar{\mu}E = \inf \mu G$, *где* $\inf$ *берется по всем* $G \supseteq E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая система $\mathscr{L} = \{l\}$, покрывающая E, для которой Σ длина $l \leqslant \bar{\mu}E + \varepsilon$. Система $\mathscr{L}$ покрывает $G_* = \bigcup l$. Значит, и $\mu G_* \leqslant \bar{\mu}E + \varepsilon$, причем $G_* \supseteq E$. Поэтому

$$\bar{\mu}E \leqslant \inf \mu G \leqslant \bar{\mu}E + \varepsilon.$$

И так как $\varepsilon > 0$ — любое, то лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *Для каждого множества* E:

$$(1)\quad \forall \varepsilon > 0 \exists G \supseteq E, \quad \text{что} \quad \bar{\mu}E \leqslant \mu G \leqslant \bar{\mu}E + \varepsilon,$$

$$(2)\quad \exists G_\delta \supseteq E, \quad \text{что} \quad \bar{\mu}E = \mu G_\delta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Область G для условия (1) доставляет предыдущая лемма. Пересечение $G_\delta = \bigcap G_n$ таких областей, построенных для $\varepsilon = 1/n$, дает

$$\bar{\mu}E \leqslant \mu G_\delta \leqslant \mu G_n \leqslant \bar{\mu}E + 1/n \quad \text{при всех} \quad n = 1, 2, \ldots$$

З а м е ч а н и е. Не следует думать, что для любого E и $\varepsilon > 0$ найдется $G \supseteq E$, для которого $\bar{\mu}\,(G \setminus E) < \varepsilon$; или какое-либо измеримое $H \supseteq E$, для которого $\bar{\mu}\,(H \setminus E) < \varepsilon$. Это верно лишь для измеримого E.

Более тонкой является

Т е о р е м а 2. (1) $\forall \varepsilon > 0 \exists G \supseteq E$ / *измеримое* H, *что, если* $H \subseteq G \setminus E$, *то* $\mu H < \varepsilon$.

(2) $\exists G_\delta \supseteq E$ / *измеримое* H, *что, если* $H \subseteq G_\delta \setminus E$, *то* $\mu H = 0$.

Читателю рекомендуется доказать ее самостоятельно.

§ 4. Измеримость (определение Лебега)

Первоначальное определение измеримости, данное Лебегом, прозрачнее и кажется менее стеснительным, чем определение Каратеодори. Здесь и далее I — отрезок конечной длины.

О п р е д е л е н и е Л е б е г а. *Ограниченное множество* E *называется Л-измеримым, если найдется* $I \supseteq E$, *на котором*

$$\bar{\mu}I = \bar{\mu}E + \bar{\mu}\,(I \setminus E). \tag{1}$$

Неограниченное множество называется Л-измеримым, если представимо объединением счетного числа ограниченных Л-измеримых множеств.

Теорема. *Л-измеримость и* (*просто*) *измеримость эквивалентны.*

Доказательство. Пусть E измеримо и ограничено. Тогда условие (1) имеет место для любого множества I. Следовательно, E будет Л-измеримо. Если же E не ограничено, то

$$E = \bigcup (E \cdot [-n, \ n]).$$

Здесь $E \cdot [-n, \ n]$ измеримы и ограничены. Значит, они Л-измеримы и Л-измеримость E доказана.

Обратно. Пусть E будет Л-измеримо и ограничено. Тогда найдется $I \supseteq E$, на котором

$$\overline{\mu} I = \overline{\mu} E + \overline{\mu}(I \setminus E).$$

Аппроксимируя E и $I \setminus E$ по внешней мере множествами G_δ и G_δ^*, получаем

$$I \supseteq G_\delta \supseteq E \quad \text{и} \quad \mu G_\delta = \overline{\mu} E,$$
$$I \supseteq G_\delta^* \supseteq I \setminus E \quad \text{и} \quad \mu G_\delta^* = \overline{\mu}(I \setminus E).$$

При этом, разумеется, $I = G_\delta + G_\delta^*$ и (см. конец § 2)

$$\mu(G_\delta G_\delta^*) = \mu G_\delta + \mu G_\delta^* - \mu(G_\delta + G_\delta^*) = 0.$$

Но $G_\delta \setminus E \subseteq G_\delta G_\delta^*$ и, значит,

$$E = G_\delta \setminus (G_\delta \setminus E), \text{ где } \mu(G_\delta \setminus E) = 0.$$

Поэтому E измеримо. Неограниченное Л-измеримое множество измеримо, как счетное объединение измеримых множеств.

§ 5. Аппроксимации по мере

Теорема 1. *Для измеримости E необходимо и достаточно любое из условий:*

$$\text{(1)} \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists G \supseteq E, \ \text{что} \ \overline{\mu}(G \setminus E) < \varepsilon;$$
$$\text{(2)} \qquad \exists G_\delta \supseteq E, \qquad \text{что} \ \overline{\mu}(G_\delta \setminus E) = 0.$$

Доказательство. Если E удовлетворяет условию (1), то

$$\forall n\, \exists G_n \supseteq E,\ \overline{\mu}(G_n \setminus E) < 1/n$$

и для $G_\delta = \bigcap G_n$ будет $\mu(G_\delta \setminus E) = 0$. Значит, для E выполнено (2). Но коль скоро выполнено (2), то E измеримо, ибо $E = G_\delta \setminus (G_\delta \setminus E)$, где $\mu(G_\delta \setminus E) = 0$.

Пусть, наоборот, E — измеримо и $\varepsilon > 0$. Разобьем $E = \bigcup E_n$, $\varepsilon = \Sigma \varepsilon_n$, где $E_n = E\cdot(-n, n)$, а $\varepsilon_n > 0$. По аппроксимации внешней меры найдутся G_n, для которых

$$G_n \supseteq E_n \quad \text{и} \quad \mu G_n \leqslant \mu E_n + \varepsilon < \infty.$$

Значит, $\mu(G_n \setminus E) \leqslant \varepsilon_n$. Для объединения $G = \bigcup G_n$ будет $G \supseteq E$, $G \setminus E \subseteq \bigcup (G_n \setminus E_n)$, значит, $\mu(G \setminus E) \leqslant \varepsilon$. Тем самым для E выполнено (1), а значит и (2).

Теорема 2. *Для измеримости E необходимо и достаточно любое из условий:*

$$(1) \qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists F \subseteq E, \quad \textit{что} \quad \overline{\mu}(E \setminus F) < \varepsilon;$$
$$(2) \qquad \exists F_\sigma \subseteq E, \quad \textit{что} \quad \overline{\mu}(E \setminus F_\sigma) = 0.$$

Доказательство. Применяя теорему 1 к CE и используя тождество $A \setminus B = (CB) \setminus (CA)$, получаем теорему 2.

Теорема 3. *Для измеримости E необходимо и достаточно любое из условий:*

$$(1)\ \forall \varepsilon > 0\, \exists F, G, \quad \textit{что} \quad F \subseteq E \subseteq G \ \textit{и}\ \mu(G \setminus F) < \varepsilon;$$
$$(2)\ \exists F_\sigma, G_\delta, \quad \textit{что} \quad F_\sigma \subseteq E \subseteq G_\delta \ \textit{и}\ \mu(G_\delta \setminus F_\sigma) = 0.$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1; необходимость — из теорем 1 и 2.

Признак Валле-Пуссена. *Множество E с $\overline{\mu}E < \infty$ измеримо тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется H, состоящее из конечного числа интервалов, для которого двусторонняя разность*

$$E \dot{-} H = (E \setminus H) + H \setminus E)$$

имеет внешнюю меру меньшую, чем ε. Доказательство предоставляется читателю.

Полунепрерывность внешней меры. *Если $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$, то $\overline{\mu} \bigcup E_n = \lim \overline{\mu} E_n$.* Доказательство предоставляется читателю.

§ 6. Покрытие Витали

Лемма Витали доставляет аппарат для решения трудных задач метрической теории множеств.

1. Определение. Система S *покрывает по Витали* точку x, если состоит из промежутков *), не вырождающихся в точки и

$$(\forall l \ni x \exists s \in S)(x \in s \subseteq l).$$

Система S покрывает по Витали множество E, если покрывает по Витали каждую точку $x \in E$.

Упражнение. Пусть $S = \{s\}$ покрывает E по Витали, а G — область. Тогда элементы s, входящие в G, покрывают по Витали EG.

Лемма Витали. *Из системы S, покрывающей по Витали множество E, можно выбрать неналегающую последовательность $s_1, s_2, \ldots, \in S$, покрывающую почти все E.*

Доказательство. (1) Пусть сперва $\overline{\mu} E < \infty$. Возьмем $G \supseteq E$ с мерой $\mu G < \infty$, удалим из S промежутки, не лежащие в G, и обозначим оставшуюся систему через S_1.

Выбор нужной последовательности исключительно прост. Из S_1 выберем s_1 длиною

$$\mu s_1 > (^1/_2) \sup \mu s \text{ по всем } s \in S_1$$

(sup конечен, не превосходит μG). Удалим из S_1 промежуток s_1 и все промежутки, пересекающиеся с s_1 (поскольку они нам уже не могут пригодиться). Среди оставшихся (S_2) выберем s_2 длиною

$$\mu s_2 > (^1/_2) \sup \mu s \text{ по всем } s \in S_2.$$

Удалим из s_2 промежутки, пересекающиеся с s_2 (включая сам s_2) и т. д. Процесс оборвется, если очередное $S_{n+1} = \theta$. В этом случае формально положим $s_{n+1} = s_{n+2} = \ldots = \theta$.

Ясно, что $s_1, s_2, \ldots$ не налегают. Сложнее доказать, что они почти покрывают E. Сперва заметим, что S_n

---

*) Напомним, что промежуток — это выпуклое множество точек прямой, т. е. $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b).

покрывает $E\setminus(\bar{s}_1 + \ldots + \bar{s}_{n-1})$ и, следовательно,

S_n почти покрывает $E_n = E\setminus(s_1 + \ldots + s_{n-1})$.

Далее, ряд

$$\mu s_1 + \mu s_2 + \ldots \leqslant \mu G < \infty \qquad (*)$$

сходится. Следовательно,

$$\sup_{s \in S_k} \mu s < 2\mu s_k \to 0$$

и каждый промежуток $s \in S_1$ удаляется из последовательности

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots$$

на некотором шаге $k = k(s)$, так что $s \in S_k\setminus S_{k+1}$. Значит, s пересекается с s_k и имеет длину

$$\mu s \leqslant \sup_{s_* \in S_k} \mu s_* < 2\mu s_k.$$

Увеличим s_k вокруг его центра в 5 раз. Получившийся промежуток t_k покроет s:

$$\text{если } S_k \ni s \notin S_{k+1}, \text{ то } s \subseteq t_k.$$

А их объединение

$$t_n + t_{n+1} + \ldots$$

покроет все промежутки $s \in S_n$ и будет содержать почти все точки E_n.

Таким образом, при любом n

$$\bar{\mu} E_n \leqslant \mu t_n + \mu t_{n+1} + \ldots = 5(\mu s_n + \mu s_{n+1} + \ldots).$$

Ряд $(*)$ сходится. Его остаток стремится к 0. Поэтому

$$\bar{\mu}\,[E\setminus(s_1 + s_2 + \ldots)] \leqslant \bar{\mu} E_n \to 0$$

и лемма доказана для $\mu E < \infty$.

(2) Неограниченное E можно разбить на счетное число ограниченных E_p:

$$E_p = E \cdot (p,\ p+1) \text{ для } p = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

и счетный остаток целочисленных точек. Из системы $S = \{s\}$ выделим счетное число подсистем S_p:

$$s \in S_p, \text{ когда } s \in S \text{ и } s \in (p, p+1).$$

S_p образует покрытие Витали для E_p. Применяя к E_p и S_p уже доказанную часть леммы, выделяем неналегающую последовательность s_{p1}, s_{p2}, ..., покрывающую почти все E_p. Но промежутки s_{pk} не пересекаются и при различных p. Поэтому счетная система $\{s_{pk}\}$ покрывает почти все E. Лемма Витали доказана.

Замечание. Если в условиях леммы Витали $\bar{\mu}E < \infty$, то для каждого $\varepsilon > 0$ из S можно выбрать: неналегающую последовательность $\{s_k\}$, для которой

$$\bar{\mu}\left(E \setminus \bigcup_1^\infty s_k\right) = 0, \quad \bar{\mu}E \leqslant \sum_1^\infty \mu s_k < \bar{\mu}E + \varepsilon, \qquad \bar{\mu}\left(E \setminus \bigcup_1^n s_k\right) \to 0; \tag{1}$$

и конечное число неналегающих s_1, ..., s_n, для которых

$$\bar{\mu}\left(E \setminus \bigcup_1^n s_k\right) < \varepsilon \text{ и } \bar{\mu}E - \varepsilon < \sum_1^n \mu s_k < \bar{\mu}E + \varepsilon. \tag{2}$$

Для доказательства возьмем $G \supseteq E$ с $\mu G < \bar{\mu}E + \varepsilon$, удалим из S промежутки, не содержащиеся в G и выделим из оставшихся последовательность неналегающих $\{s_k\}$, покрывающую почти все E. Тогда выполнятся условия (1). Отбросив s_{n+1}, s_{n+2}, ... с суммой длин $<\varepsilon$, мы удовлетворим условиям (2).

2. В приложениях бывает полезна и нижеследующая лемма, близкая к лемме Витали.

Лемма. *Пусть $S = \{s\}$ — система промежутков, не вырождающихся в точки, $E = \bigcup s$ и $\mu E < \infty$. Тогда из S можно выбрать конечное число неналегающих s_1,... ..., s_n, для которых*

$$\mu s_1 + \ldots + \mu s_n > \mu E/10. \tag{*}$$

Доказательство в основном повторяет часть (1) доказательства леммы Витали. Из S выбирается последовательность неналегающих $\{s_k\}$ и строятся $t_k \sim 5s_k$.

Каждый промежуток $s \in S$ покрывается некоторым t_k. Следовательно,

$$\bigcup_1^\infty t_k \supseteq E, \quad 5\sum_1^\infty \mu s_k = \sum_1^\infty \mu t_k \geqslant \mu E,$$

и при достаточно большом n выполняется (*).

§ 7. Плотность

1. Определение. *Средней внешней плотностью* множества E на интервале l называется

$$d(l, E) = \bar{\mu}(lE)/\mu l.$$

Если E измеримо, то $d(l, E)$ называют *средней плотностью* E на l.

Определение. Пусть задано E и произвольная точка x. Если существует предел

$$\lim d(l, E) = d(x, E)$$

при произвольном уменьшении интервала $l \ni x$, то $d(x, E)$ называется *внешней плотностью* (для измеримых — *плотностью*) E в точке x.

Точнее: $d(x, E)$ *называется внешней плотностью* E *в точке* x, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall l$$
$$(\mu l < \delta \text{ и } l \ni x) \Rightarrow (|\bar{\mu}(lE)/\mu l - d(x, E)| < \varepsilon).$$

Задача. Какова плотность отрезка в его конце?

Задача. Для произвольного $0 \leqslant d \leqslant 1$ построить E, имеющее в $x = 0$ плотность d.

Определение. *Точка x называется точкой внешней плотности (просто плотности) множества E, если $d(x, E) = 1$, и точкой внешнего разрежения (просто разрежения), когда $d(x, E) = 0$.*

Если E измеримо и в точке x имеется плотность $d(x, E)$, то существует и $d(x, CE) = 1 - d(x, E)$. Значит, точка плотности измеримого множества есть точка разрежения его дополнения.

Теорема 1. *Пусть E измеримо. Тогда почти каждая точка $x \in E$ является точкой плотности E и точкой разрежения CE.*

Эта теорема будет вытекать из следующей более общей:

Теорема 2. *Основная теорема о точках плотности. Для любого E почти все его точки являются точками внешней плотности E.*

Доказательство. Пусть H — множество точек E, не являющихся точками его внешней плотности; пусть H_n — точки E, внешней «не плотности E не менее $1/n$».

Точнее: $x \in H_n$, если $x \in E$ и $\forall \delta > 0\ \exists l$, для которого $x \in l$, $\mu l < \delta$ и

$$\bar{\mu}(lE)/\mu l \leqslant 1 - 1/n;$$

так что $H = \bigcup H_n$, и если $\bar{\mu} H > 0$, то хотя бы одно слагаемое имеет положительную внешнюю меру: пусть это будет $\bar{\mu} H_n > 0$. Выберем интервал $(-m, +m)$, на котором $\bar{\mu}[H_n \cdot (-m, m)] > 0$, и обозначим

$$T_n = H_n \cap (-m, m), \quad \lambda = \bar{\mu} T_n, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Наконец покроем T_n областью $G \supseteq T_n$ с мерой

$$\bar{\mu} G < \lambda (1 + 1/n).$$

Для каждого $x \in T_n$ и $\delta > 0$ найдется интервал l:

$$x \in l \subseteq G, \quad \mu l < \delta, \quad \bar{\mu}(l T_n) \leqslant (1 - 1/n) \mu l.$$

Система $\mathcal{L} = \{l\}$ всех этих интервалов покрывает T_n по Витали, и из нее можно выделить последовательность неналегающих интервалов $l_1, l_2, \ldots$, покрывающую почти всё T_n. Тогда

$$\lambda = \bar{\mu}(T_n \cdot \bigcup_1^\infty l_k) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \bar{\mu}(l_k T_n) \leqslant (1 - 1/n) \sum_1^\infty \mu l_k,$$

$$\lambda \leqslant (1 - 1/n) \mu G \leqslant (1 - 1/n^2) \lambda.$$

Следовательно, $\lambda = 0$, вопреки выбору T_n. Теорема доказана.

Замечание. При определении внешней (или просто) плотности E в точке x можно рассматривать не только интервалы, содержащие x, но и отрезки. Это не повлияет на существование или значение плотности. Действительно, пусть отрезок $h \ni x$, а число $\varepsilon > 0$. Сдвинув h в сторону x менее чем на ε, мы получим интервал $l \ni x$ и при этом

$$\bar{\mu}(hE) \lesseqgtr \bar{\mu}(lE) \pm \varepsilon.$$

Отсюда

$$\bar{\mu}(hE) \underset{>\inf}{\leqslant} {}^{\sup} \bar{\mu}(lE),$$

где sup и inf берутся по всем интервалам l, $l \ni x$, $\mu l = \mu h$. Поэтому

$$\overline{\underline{\lim}}\, \bar{\mu}(hE)/\mu h = \overline{\underline{\lim}}\, \bar{\mu}(lE)/\mu l$$

по всем $h \ni x$ и $l \ni x$ при $\mu h \to 0$ и $\mu l \to 0$.

2. Представляется удобным обобщить понятие точек плотности и разрежения множества E так, чтобы не предполагать измеримости E. Именно:

x называется точкой разрежения E, если

$$\bar{\mu}(lE) / \mu l \to 0, \text{ когда } \mu l \to 0 \text{ по } l \ni x;$$

x называется точкой плотности E, если является точкой разрежения для CE.

Для измеримых множеств эти определения совпадают с предыдущими.

Т е о р е м а. *Если почти каждая точка $x \in E$ является точкой плотности E, то E измеримо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности доказательства будем считать каждую точку $x \in E$ точкой плотности E, а само E расположенным на конечном интервале l.

Зададим $\varepsilon > 0$ и отнесем каждой точке $x \in E$ последовательность l_n с условиями ($n = 1, 2, \ldots$):

$$x \in l_n \subseteq l, \quad \mu l_n < 1/n, \quad \bar{\mu}[l_n \cdot (l \setminus E)] < \varepsilon \mu l_n.$$

По лемме Витали, из системы $\{l_n\}$, взятой для всех n и $x \in E$, выберем счетное число неналегающих g_k, покрывающих почти всё E. Тогда, полагая $G = \bigcup g_k$, получим

$$\bar{\mu}E + \bar{\mu}(l \setminus E) < \mu G + \mu(l \setminus G) + \varepsilon \mu G.$$

И, так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\bar{\mu}E + \bar{\mu}(l \setminus E) = \mu l$, и E измеримо по Лебегу.

У п р а ж н е н и я. Пусть $\mathscr{P}(E)$ — множество точек плотности множества E. Тогда при любом E множество $\mathscr{P}(E)$ измеримо и $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) = \mathscr{P}(E)$. Доказать.

В метрической теории множеств два множества (E и H) считаются эквивалентными, если отличаются на множество меры нуль:

$$\mu[(E \setminus H) + (H \setminus E)] = 0.$$

Точки внешней плотности эквивалентных множеств, очевидно, совпадают (равно как и их точки плотности).

В связи с этим возникает

Задача. Среди всего класса $\mathscr{E} = \{E\}$ измеримых и попарно эквивалентных множеств E указать эффективно какое-нибудь множество E_*.

Решение. В качестве E_* можно взять то $E \in \mathscr{E}$, которое содержит все свои точки плотности и состоит только из собственных точек плотности. Такое E_* действительно найдется. Достаточно рассмотреть любое $E \in \mathscr{E}$ и взять его точки плотности.

Замечание. При перенесении результатов этой главы на n-мерное пространство интервалы l следует заменить внутренними точками n-мерных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям. Длины интервалов следует заменить объемами параллелепипедов. Наконец, внешнюю плотность E в точке x следует определить как предел

$$\lim \overline{\mu}(lE)/\mu l \quad \text{при} \quad d(l) \to 0 \text{ по } l \ni x.$$

Здесь $d(l)$ — диаметр l — верхняя грань расстояния между парами точек x_1, $x_2 \in l$.

Следует отметить, что при $n > 1$ равенство мер конгруэнтных множеств доказывается труднее, чем при $n = 1$.

ГЛАВА 4

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

В этой главе функции могут принимать кроме конечных значений еще и бесконечные с определенным знаком (т. е. $+\infty$ или $-\infty$). Арифметические действия с конечными и бесконечными операндами определяются естественным образом (когда это ясно) и не определены в остальных случаях. Умножение на нуль всегда дает нуль, а деление на нуль — всегда не определено. Так, например (c — конечное число):

$$c+\infty=\infty, \quad \infty+\infty=\infty, \quad c/(\pm\infty)=0 \text{ и т. д.}$$

Но не определены результаты действий:

$$(+\infty)/(\pm\infty), \quad \infty-\infty \text{ и т. д.}$$

§ 1. Определение и основные свойства измеримых функций

Определение. Функция $f(x)$ называется *измеримой на множестве* E, когда она определена почти во всех точках E и ее лебеговские множества *)

$$\{a \leqslant f(x) \leqslant b\}\cdot E, \quad \{a < f(x) < b\}\cdot E, \qquad (1)$$
$$\{a \leqslant f(x) < b\}\cdot E, \quad \{a < f(x) \leqslant b\}\cdot E$$

измеримы при любых a и b (в том числе равных $\pm\infty$). Функцию, измеримую на всем множестве, где она определена, называют (просто) *измеримой*.

Сделаем несколько легко проверяемых замечаний:

1) В формулах (1) можно опустить пересечение с E, если считать $f(x)$ не определенной вне E. Обычно так и поступают, когда это не ведет к недоразумениям.

*) $\{a \leqslant f(x) \leqslant b\}$ обозначает множество точек x, удовлетворяющих указанному неравенству. Когда эта запись не достаточно ясна, пишут подробнее. Например, $\{x\colon g(y) < f(x)\}$ обозначает множество точек x (а не y), удовлетворяющих неравенству (при данном y).

2) Если $f(x)$ измерима на E, то E измеримо. Действительно, множество E распадается на сумму $E = E_1 + E_2$ тех точек E, в которых $f(x)$ определена (E_1), и точек E, в которых $f(x)$ не определена (E_2). Мера $\mu E_2 = 0$, а E_1 измеримо по условию:

$$E_1 = \{-\infty \leqslant f(x) \leqslant +\infty\} \cdot E.$$

3) Всякая функция измерима на множестве меры нуль.

4) Если $f(x)$ измерима на E, то измеримы множества

$$\{f(x) > a\} E = \{a < f(x) \leqslant \infty\} E,$$
$$\{f(x) \geqslant a\} E, \quad \{f(x) = a\} E, \quad \{|f(x)| < \infty\} E.$$

5) Если $f(x)$ измерима на E, то она измерима на любом измеримом $H \subseteq E$, ибо (например)

$$\{a \leqslant f(x) \leqslant b\} H = \{a \leqslant f(x) \leqslant b\} E \cdot H.$$

6) Если $f(x)$ измерима на каждом E_1, E_2, ..., то она измерима на их объединении, пересечении, разности $E_1 \setminus E_2$ и т. п. Например,

$$\{a \leqslant f(x) \leqslant b\} \cdot \bigcup E_n = \bigcup (\{a \leqslant f(x) \leqslant b\} E).$$

7) Константа ($f(x) \equiv c$) измерима на любом измеримом E.

8) $f(x)$, измеримую на E, можно продолжить с E до функции, измеримой на всей прямой $I = (-\infty, \infty)$, например, полагая $f(x) = 1$ вне E. Иногда этот прием упрощает выкладки.

9) Изменение значений $f(x)$ на множестве меры нуль не меняет ее измеримости на любом множестве E.

Благодаря пунктам 5) и 9) функцию $f(x)$, заданную почти на всем E, можно доопределить на всем E и сделать не определенной вне E, не меняя ее измеримости на E.

1. Проверка измеримости множеств (1) упрощается благодаря нижеследующим признакам измеримости функции.

1.1. Если $f(x)$ определена почти на всем E и множества

$$\{f(x) \geqslant a\} E, \quad \{f(x) > a\} E, \quad \{f(x) < b\} E, \quad \{f(x) \leqslant b\} E \qquad (2)$$

измеримы при всех *конечных* a и b, то $f(x)$ измерима на E.

Действительно, множества (2) измеримы и при a, b, равных $\pm\infty$, благодаря представлениям ($\bigcup$ и $\bigcap$ берутся по $n = 1, 2, \ldots$):

$$\{f(x) > -\infty\} E = \bigcup \{f(x) > -n\} E,$$
$$\{f(x) = -\infty\} E = \bigcap \{f(x) < -n\} E,$$
$$\{f(x) \geqslant -\infty\} E = \{f(x) > -\infty\} E + \{f(x) = -\infty\} E,$$
$$\{f(x) < -\infty\} E = \theta \text{ и т. д.}$$

Теперь множества (1) измеримы как пересечения множеств (2) при любых a и b (в том числе равных $\pm\infty$).

1.2. Если $f(x)$ *конечна* почти в каждой точке E или определена почти на всем *измеримом* E, то для ее измеримости на E достаточно, чтобы были измеримы множества *одной* из четырех групп

$$\{f(x) \geqslant a\} E, \ \{f(x) > a\} E, \ \{f(x) < b\} E, \ \{f(x) \leqslant b\} E.$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ конечна почти на всем E и множества одной из групп (2), например первой, измеримы. Тогда объединение

$$\bigcup \{f(x) \geqslant -1/n\} \quad \text{по всем } n = 1, 2, \ldots$$

дает почти все E, и E измеримо.

Доопределим $f(x)$ на всем E и будем считать ее не определенной вне E. Покажем, что если измеримы множества одной группы (2), то измеримы множества остальных групп. Действительно, множества 1-й и 2-й групп (а также 3-й и 4-й) измеримы одновременно, ибо

$$\{f(x) \geqslant a\} = \bigcap \{f(x) > a - 1/n\}.$$
$$\{f(x) > a\} = \bigcup \{f(x) \geqslant a + 1/n\} \text{ и т. п.}$$

Но и множества 1-й и 3-й групп (а также 2-й и 4-й) измеримы одновременно, ибо

$$\{f(x) \leqslant c\} = E \setminus \{f(x) > c\},$$
$$\{f(x) > c\} = E \setminus \{f(x) \leqslant c\}.$$

Теперь благодаря 1.1 утверждение доказано. Оно становится неверным, если отбросить предположения о конечности $f(x)$ и измеримости E (приведите примеры).

2. Наша ближайшая цель — убедиться в обширности класса измеримых функций. Для этого мы установим измеримость некоторых функций и покажем, что привычные действия над измеримыми функциями не выводят из класса измеримых функций.

2.1. Непрерывная функция измерима. Точнее: если $f(x)$ задана и непрерывна на измеримом E, то она измерима на E.

Действительно, зафиксируем число c и множество $E_c = \{f(x) > c\} \cdot E$. Каждую точку $x_c \in E_c$ покроем Таким интервалом l_c, что

$$f(x) > c \text{ при всех } x \in l_c \cdot E.$$

Объединение $G_c = \bigcup l_c$ всех интервалов l_c есть область. Значит, $E_c = GE$ и измеримо.

Отсюда вытекает измеримость функции $f(x)$, непрерывной почти во всех точках измеримого E (например, монотонной). Для проверки достаточно рассмотреть $f(x)$ на множестве E_0 точек E, где $f(x)$ непрерывна.

Замечание. Фактически мы доказали измеримость функции, *полу*непрерывной сверху ($f(x)$ называется полунепрерывной сверху в точке x_0, если $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) \geqslant f(x_0)$). Аналогично определяется полунепрерывность снизу. Определения полунепрерывности естественно распространяются на функции, заданные на множестве.

2.2. Характеристическая функция $f_H(x)$ множества H:

$$f_H(x) = 0\ (=1) \text{ при } x \notin H \ (\text{при } x \in H),$$

измерима вместе с множеством H.

Действительно,

$$\{f(x) \geqslant a\} = (-\infty,\ \infty), = H, = \theta$$

соответственно, при $a \leqslant 0$, $0 < a \leqslant 1$, $1 < a$.

2.3. Если E_1, E_2, ... измеримы и не налегают, то измерима ступенчатая функция

$$f(x) \equiv c_n \text{ при } x \in E_n,$$
$$f(x) \equiv c_0 \text{ при } x \notin \bigcup E_n.$$

Действительно,
$\{f(x) \geqslant a\} = \bigcup E_n$ по тем $n = 0, 1, \ldots$, для которых $c_n \geqslant a$

В частности, если ось Ox разбита точками

$$\ldots < x_{-n} < x_{-n+1} < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots,$$

то измерима
$$f(x) = c_n \text{ при } x_n \leqslant x < x_{n+1}.$$

2.4. Пусть на E измеримы $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... Тогда на E измеримы функции:

$$u(x) = \max(f_1(x), f_2(x)),\ v(x) = \min(f_1(x), f_2(x)),$$
$$p_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } f_1(x) \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } f_1(x) < 0, \end{cases}$$
$$q_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } f_1(x) \geqslant 0, \\ f_1(x) & \text{при } f_1(x) < 0, \end{cases}$$
$$p(x) = \sup f_n(x), \quad q(x) = \inf f_n(x),$$
$$\overline{\lim} f_n(x), \quad \underline{\lim} f_n(x).$$

И если $f_n(x)$ сходится почти всюду на измеримом E, то измерима предельная функция $\lim f_n(x)$.

Действительно, перечисленные функции заведомо определены там, где определены все $f_n(x)$, следовательно, они определены почти на всем E.

Далее. При любом конечном c будет

$$\{\max(f_1(x), f_2(x)) \geqslant c\} E = (\{f_1(x) \geqslant c\} E) \cup (\{f_2(x) \geqslant c\} E),$$
$$\{\min(f_1(x), f_2 x)) \geqslant c\} E = (\{f_1(x) \geqslant c\} E) \cap (\{f_2(x) \geqslant c\} E).$$

Следовательно, u и v измеримы на E. Теперь измеримы

$$p_a(x) = \max(f_1(x),\ f_2(x)) \text{ при } f_2(x) \equiv a,$$
$$q_a(x) = \min(f_1(x),\ f_2(x)) \text{ при } f_2(x) \equiv a.$$

Измеримы лебеговские множества и доставляющие их функции:

$$\{| f(x) | \leqslant c\} E = \{-c \leqslant f(x) \leqslant c\} E,$$
$$\{p(x) > c\} E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k(x) > c\} E,$$
$$\{q(x) < c\} E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k(x) < c\} E.$$

Верхний и нижний пределы измеримы на E, ибо, по определению,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \inf_n \sup_{k \geqslant n} f_k(x),$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \sup_n \inf_{k \geqslant n} f_k(x).$$

Наконец, если $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на E, то почти на всем E функция $f(x)$ совпадает с $\overline{\lim} f_n(x)$ и, значит, измерима.

2.5. Если $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и конечны почти всюду на E, то на E измеримы

$$h_1(x) = f(x) \pm g(x),\ h_2(x) = f(x)\cdot g(x),\ h_3(x) = f(x)/g(x);$$

последняя — в предположении, что $g(x) \neq 0$ почти на всем E.

Доказательство. Будем, как обычно, считать все функции не определенными вне E и отметим, что $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(x)$ определены и конечны почти на всем измеримом E.

1) Измеримы $f^2(x)$ и $1/g(x)$ при $g(x) \neq 0$ почти всюду на E. Действительно, при любом c измеримы множества:

$$\{f^2(x) < c\} = \{-\sqrt{c} < f(x) < \sqrt{c}\} \text{ при } c > 0 \text{ и пусто при } c \leqslant 0,$$

$$\{1/g(x) < c\} = \begin{cases} \{g(x) < 0\} + \{g(x) > 1/c\} & \text{при } c > 0, \\ \{1/c < g(x) < 0\} & \text{при } c < 0. \end{cases}$$

2) Функции $k \pm f(x)$ измеримы при любой константе k, ибо измеримы множества

$$\{k + f(x) \leqslant c\} = \{f(x) \leqslant c - k\},$$
$$\{k - f(x) \leqslant c\} = \{f(x) \geqslant k - c\}.$$

3) Измеримо множество $\{f(x) < g(x)\}$, ибо

$$\{f(x) < g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{f(x) < r_k\} \cdot \{r_k < g(x)\}), \qquad (*)$$

где $\bigcup$ берется по (счетному) множеству всех рациональных r_k.

4) Измеримы $f(x) \pm g(x)$, ибо измеримы функции $c \pm g(x)$ и множества

$$\{f(x) \pm g(x) < c\} = \{f(x) < (c \mp g(x))\}.$$

5) $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ измеримы (последняя для $g(x) \neq 0$ почти на всем E) благодаря тождествам

$$f\cdot g = [(f + g)^2 - (f - g)^2]/4,$$
$$f/g = f\cdot(1/g).$$

3. Теорема (Д. Егорова). *Если последовательность измеримых на E функций $f_n(x)$ сходится к конечному пределу почти во всех точках E и $\mu E < \infty$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется совершенное $P \subseteq E$, на котором сходимость равномерна и $\mu(E \setminus P) < \varepsilon$.*

Доказательство. Возьмем $\mathscr{E} \subseteq E$, на котором все $f_n(x)$ определены и сходятся к конечному пределу $f_n(x) \to f(x)$. Примем, что $f(x)$ и все $f_n(x)$ определены только на $\mathscr{E}$. По условию

$$|f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ т. е. } \overline{\lim}\, |f_n(x) - f(x)| = 0 \text{ на } \mathscr{E}.$$

Введем $g_n(x) = \sup |f_k(x) - f(x)|$ по всем $k \geqslant n$. Тогда

$$g_1(x) \geqslant g_2(x) \geqslant \ldots \to 0 \text{ для каждого } x \in \mathscr{E}.$$

$f(x)$ измерима и конечна, поэтому измеримы $f_k(x) - f(x)$ и $g_n(x)$. Для измеримых множеств $H_{mn} = \{g_n(x) \geqslant 1/m\}$ будет $(m = 1, 2, \ldots)$

$$H_{m1} \supseteq H_{m2} \supseteq \ldots;\ \mu H_{m1} < \infty$$

и

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_{mn} = \theta,$$

так что $\mu H_{mn} \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Разобьем $\varepsilon/2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ (\varepsilon_m > 0)$ и для каждого m выберем такое $n = n(m)$, что $\mu H_{m,\, n(m)} < \varepsilon_m$. Тогда $H = \bigcup H_{m,\, n(m)}$, $\mu H < \varepsilon/2$. На $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E} \setminus H$ с мерой $\mu\mathscr{E}_1 > \mu\mathscr{E} - \varepsilon/2$ будет $g_{n(m)}(x) < 1/m$ Таким образом, для каждого натурального m нашлось такое $n(m)$, что

$$|f_k(x) - f(x)| < 1/m \text{ при всех } k \geqslant n(m) \text{ и } x \in \mathscr{E}_1.$$

Значит, на $\mathscr{E}_1$ сходимость равномерна. Остается взять

$$P \subseteq \mathscr{E}_1 \subseteq E \text{ с мерой } \mu P > \mu\mathscr{E}_1 - \varepsilon/2 > \mu E - \varepsilon.$$

Замечание. Условие $\mu E < \infty$ нельзя отбросить, как показывает пример:

$$f_n(x) = \operatorname{sign}(n - x) \to 1 \text{ на } E = (-\infty, \infty).$$

4. **c-свойство (Н. Лузина).** *Измеримую и конечную функцию можно сделать непрерывной* (на всей прямой), *изменив ее значения на множестве сколь угодно малой меры*

и доопределив в точках, где она не была задана. При этом можно сохранить sup и inf ее значений. Точнее:

Теорема. *Для $f(x)$, измеримой и конечной почти на всем E, и $\varepsilon > 0$ найдется совершенное $P \subseteq E$ с мерой $\mu(E \setminus P) < \varepsilon$, на котором $f(x)$ непрерывна* (как функция, определенная на P).

Замечание. Пусть $f(x)$ непрерывна на F. Введем $g(x)$ следующим образом. Положим $g(x) = f(x)$ при $x \in F$. В каждом интервале (a, b) смежности F определим $g(x)$ линейно (и непрерывно на $[a, b]$); в бесконечном интервале $(-\infty, a)$ или (a, ∞) смежности F положим $g(x) \equiv f(a)$. Нетрудно проверить, что $g(x)$ будет непрерывна на всей прямой $I = (-\infty, \infty)$ и

$$\mathop{\sup\limits_{\inf}}_{x \in I} g(x) = \mathop{\sup\limits_{\inf}}_{x \in F} f(x).$$

Благодаря этому замечанию из сформулированной георемы вытекает первоначальная формулировка с-свойства.

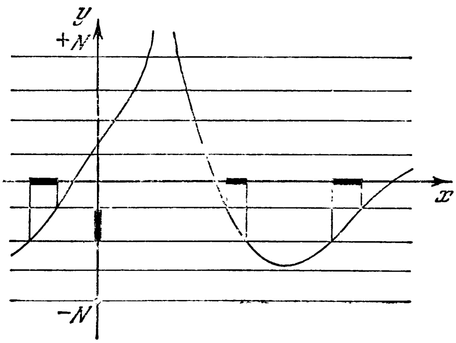


Рис. 4.1.

Доказательство. 1). Пусть сперва $f(x)$ определена, конечна и измерима на ограниченном E, а ε и ν — положительные числа. Поскольку

$$\{|f(x)| < 1\} \subseteq \{|f(x)| < 2\} \subseteq \ldots \text{ и } \bigcup \{|f(x)| < N\} = E,$$

то $\lim \mu \{|f(x)| < N\} = \mu E < \infty$ и для некоторого N

$$\mu\{|f(x)| > N\} > \mu E - \varepsilon/2.$$

Отрезок $[-N, +N]$ разобьем на m равных промежутков точками

$$-N = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = N, \quad y_k - y_{k-1} < \nu$$

и рассмотрим (рис. 4.1)

$$E_k = \{y_{k-1} \leqslant f(x) < y_k\}.$$

Множества E_k не налегают и

$$E_1 + \ldots + E_m \supseteq \{|f(x)| < N\}.$$

В каждое E_k впишем $\mathcal{F}_k$ с мерой

$$\mu\mathcal{F}_k > \mu E_k - \varepsilon/(4m),$$

благодаря чему

$$\mu \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{F}_k > \mu E - \varepsilon.$$

Функцию $f_{\varepsilon\nu}(x)$ определим на $F_{\varepsilon\nu} = \bigcup \mathcal{F}_k$ равенством

$$f_{\varepsilon\nu}(x) = y_k \text{ при } x \in \mathcal{F}_k.$$

Область определения $f_{\varepsilon\nu}(x)$, т. е. $F_{\varepsilon\nu}$, распадается на конечное число замкнутых $\mathcal{F}_k$, на каждом из которых $f_{\varepsilon\nu}(x)$ непрерывна (постоянна). Следовательно, $f_{\varepsilon\nu}$ непрерывна на $F_{\varepsilon\nu}$ и

$$|f_{\varepsilon\nu}(x) - f(x)| < \nu \text{ для всех } x \in F_{\varepsilon\nu}.$$

2) Возьмем сумму положительных $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots < \varepsilon$ и последовательность положительных $\nu_n \to 0$. Для каждой пары $(\varepsilon, \nu) = (\varepsilon_n, \nu_n)$ определим, из предыдущего пункта $F_n = F_{\varepsilon\nu}$ и $f_n(x) = f_{\varepsilon\nu}(x)$. Тогда на $F = \bigcap F_n$ все $f_n(x)$ определены, непрерывны и равномерно сходятся к $f(x)$, ибо

$$|f_n(x) - f(x)| < \nu_n \text{ для всех } x \in F \subseteq F_n.$$

$f(x)$ на F непрерывна как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Множество $F \subseteq E$ и $\mu(E \setminus F) = \mu \bigcup (E \setminus F_n) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots < \varepsilon$. Тем самым теорема установлена для ограниченного E.

3) Перейдем к общему случаю с неограниченным E. Введем ограниченные неналегающие E_n:

$$E_{2n} = E \cdot (n,\ n+1), \quad E_{2n+1} = E \cdot (-n-1,\ -n), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

и положительные $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots < \varepsilon$. На каждом E_n с помощью предыдущего пункта выберем $F_n \subseteq E_n$ с $\mu(E_n \setminus F_n) < \varepsilon_n$, так чтобы $f(x)$ на F_n была непрерывна.

Рассмотрим $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ и сходящуюся последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек из F. Последовательность $\{x_i\}$ ограничена и, следовательно, содержит точки лишь конечного числа множеств. F_n. Но $\{x_i\}$ не может содержать бесконечно много точек двух множеств F_n — иначе предельная точка $(x_i \to x)$ принадлежала бы обоим множествам, и они пересеклись бы. Значит, все точки x_i, начиная с некоторой $(i \geqslant j)$, принадлежат одному множеству F_n. Но тогда $x \in F_n \subseteq F$ и, значит, F замкнуто. Кроме того,

$$\lim f(x_i) = f(x),$$

ибо $x_i \in F_n$ при $i \geqslant j$ и $x \in F_n$, а $f(x)$ непрерывна на F_n. Поэтому $f(x)$ непрерывна на F с мерой $\mu(E \setminus F) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots < \varepsilon$.

Теорема доказана.

§ 2. Аппроксимативная непрерывность

Определение. Число A называется *аппроксимативным пределом* $f(x)$ при $x \to a$:

$$\operatorname*{alim}_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \xrightarrow[x \to a]{\text{a}} A,$$

если существует множество E, на котором $f(x)$ определена, для которого a является точкой плотности и

$$\lim f(x) = A \text{ при } x \to a \text{ по } x \in E.$$

Если аппроксимативный предел существует, то он единствен. Действительно, коль скоро точка a является точкой плотности для E_1 и для E_2, то пересечение $E = E_1 \cdot E_2$ имеет бесконечно много точек в каждом интервале $l \ni a$:

$$\text{если } \bar{\mu}(l \cdot CE_1) < (1/2)\,\mu l \text{ и } \bar{\mu}(l \cdot CE_2) < (1/2)\,\mu l,$$
$$\text{то } \bar{\mu}(\cdot CE) < \mu l \text{ и } \bar{\mu}(lE) > 0.$$

Поэтому пределы $f(x)$ при $x \to a$ по E_1 и по E_2 (если они существуют) совпадают с пределом по E и, значит, между собой.

Если $f(x) \xrightarrow[x \to a]{\text{a}} f(a)$, то говорят, что $f(x)$ *аппроксимативно непрерывна* в точке a.

Теорема. *$f(x)$ измеримая на E, аппроксимативно непрерывна почти на всем E.*

Доказательство. Разобьем $E = E_0 + E_+ + E_- + E_*$ на 4 множества:

E_0, где $f(x)$ конечна,
E_+, где $f(x) = +\infty$
E_-, где $f(x) = -\infty$
E_*, где $f(x)$ не определена.

Почти на всем $E_+ + E_-$, именно — в точках плотности E_+ и точках плотности E_-, функция $f(x)$ аппроксимативно непрерывна. Пользуясь с-свойством, построим последовательность множеств $F_n \subseteq E_0$, на которых $f(x)$ непрерывна и

$$\mu(E_0 \setminus F_n) < 1/n.$$

Тогда

$$E_0 = \bigcup_1^\infty F_n + R, \quad \text{где} \quad \mu R = 0.$$

Отбросим точки F_0, не вошедшие в $\bigcup F_n$, и те точки E_0, которые входят в некоторое F_n, но не являются его точками плотности. Отброшенное множество имеет меру нуль. Каждая оставшаяся точка $a \in E_0$ входит в некоторое F_n, при $n = n(a)$, и является точкой плотности F_n. Для такой точки

$$\lim f(x) = f(a) \text{ при } x \to a \text{ по } x \in F_{n(a)}.$$

Верна и обратная

Теорема. *Если $f(x)$ аппроксимативно непрерывна почти во всех точках* (определения), *то измерима.*

Доказательство. Исключим из области определения функции $f(x)$ те точки, в которых она не аппроксимативно непрерывна. Тогда множество E, на котором $f(x)$ определена, будет состоять только из собственных точек плотности. Следовательно, E будет измеримо. По той же причине при любом конечном A измеримо $\{f(x) > A\}$. И т. д.

Замечание. Мы доказали нечто большее: если $f(x)$ полуаппроксимативно непрерывна почти во всех точках определения, то $f(x)$ измерима.

Метрические представители измеримых функций. Две функции метрически эквивалентны, если различаются (т. е. не равны, или одна определена, а другая — нет) на множестве меры нуль. В связи с этим Лебег отметил задачу:

Среди всего набора $\Phi = \{f\}$ функций f, которые попарно метрически эквивалентны, указать эффективно одну функцию $f_* \in \Phi$ и дать способ получения f_* из любой $f \in \Phi$.

Решение. Взять в качестве f_* ту $f \in \Phi$, которая определена в тех и только тех точках e, где существует $\operatorname{alim} f(x)$ при $x \to e$. Для получения f_* можно взять любую $f \in \Phi$, найти множество $E = \{e\}$ точек e, где существует аппроксимативный предел, и положить

$$f_*(e) = \operatorname{alim} f(x) \quad \text{при} \quad x \to e.$$

Задача. Говорят, что $g(x)$ метрически мажорирует $f(x)$ на E, если обе они измеримы на E и $g(x) \geqslant f(x)$ почти на всем E.

Пусть $\Phi = \{f\}$ — семейство функций, измеримых на множестве E. Построить минимальную метрическую мажоранту всех $f \in \Phi$ на E. Точнее, построить такую $g(x)$, что:

1) g метрически мажорирует на E любую $f \in \Phi$;

2) если g_1 метрически мажорирует на E любую $f \in \Phi$, то g_1 метрически мажорирует на E функцию g.

Решение. Не уменьшая общности решения, будем считать каждую f определенной лишь в тех точках E, где она аппроксимативно непрерывна. Положим

$$g(x) = \sup f(x) \quad \text{по всем} \quad f \in \Phi.$$

Тогда $g(x)$ будет определена почти на всем E и при любом A множество $\{f(x) > A\}$ будет состоять из собственных точек плотности. Следовательно, $g(x)$ будет измерима на E. Для каждой $f \in \Phi$ функция $g(x) \geqslant f(x)$ почти на всем E. Пусть, наконец, $g_1(x)$ метрически мажорирует на E каждую $f \in \Phi$. Тогда в любой точке x множества $E_1 \subseteq E$, на котором $g_1(x)$ аппроксимативно непрерывна, будет

$$g_1(x) \geqslant \sup_{f \in \Phi} f(x) = g(x).$$

§ 3. Производные числа

В этом параграфе (если не оговорено противного) функция $f(x)$ предполагается определенной на L — интервале или всей прямой — и *конечной* в каждой точке определения. Для такой функции определено разностное отношение

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x},$$

когда $x, x' \in L$ и $x \neq x'$.

1. Производной, функции f в точке x, называется, как известно, предел

$$f'(x) = \lim_{x' \to x} [f(x') - f(x)]/(x' - x).$$

Левая и правая производные определяются как пределы:

$$f'_{\text{л}}(x) = \lim_{x' \to x - 0} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \text{ и } f'_{\text{п}}(x) = \lim_{x' \to x + 0} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$

Эти пределы могут, разумеется, не существовать. Но всегда существуют (конечные или бесконечные) пределы ($x \in L$):

$$f_-(x) = \varliminf_{x' \to x - 0} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}, \quad f^+(x) = \varlimsup_{x' \to x + 0} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x},$$

$$f^-(x) = \varlimsup_{x' \to x - 0} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}, \quad f_+(x) = \varliminf_{x' \to x - 0} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$

Они называются *производными числами*. Значок $+$ ($-$) показывает, что предел берется справа (слева). Если значок стоит сверху (снизу), то это верхний (нижний) предел.

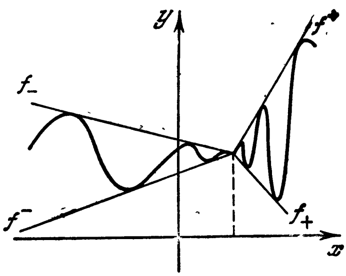


Рис. 4.2.

Величины $f^+(x)$, $f_+(x)$, $f^-(x)$ *и* $f_-(x)$ *называются соответственно: верхней правой, нижней правой, верхней левой и нижней левой производной.*

Заметьте, что на рис. 4.2 нижняя левая производная располагается выше верхней левой.

Производные числа подчинены неравенствам

$$f_-(x) \leqslant f^-(x) \text{ и } f_+(x) \leqslant f^+(x),$$

а в остальном произвольны. Если

$$f_-(x) = f^-(x) = f_+(x) = f^+(x),$$

то существует производная $f'(x)$. Если $f_+(x) = f^+(x)$, то в точке x существует производная справа. Если $f_+(x) = \infty$, то $f_+(x) = f^+(x) = \infty$ и производная справа равна $+\infty$. И т. д.

Упражнения. (1) Если $g(x) = -f(x)$, то

$$g^+(x) = -f_+(x),$$
$$g_+(x) = -f^+(x),$$
$$g^-(x) = -f_-(x),$$
$$g_-(x) = -f_-(x).$$

Если

$$g(x) = -f(-x),$$

то

$$g^+(x) = f^-(-x), \quad g_+(x) = f_-(-x),$$
$$g^-(x) = f(-x), \; g_-(x) = f_+(x).$$

Здесь, разумеется, $f^+(-x)$ означает верхнюю правую производную функции f в точке $(-x)$. Эти формулы иногда помогают перенести свойство, установленное для одного производного числа, на другие.

(2) Если $f^+(x) < c$, то существует такое $\delta > 0$, что при всех $x' \in (x, x + \delta)$ будет

$$f(x') - f(x) < c \cdot (x' - x).$$

(3) Если $f^+(x) > c$, то существует последовательность $x_n \to x$, для которой при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n > x \text{ и } f(x_n) - f(x) > c \cdot (x_n - x).$$

(4) Если $g(x) = f(x) + cx$, то $g_-(x) = f_-(x) + c$.

(5) Если $f_-(x) > 0 > f^+(x)$, то x — точка строгого локального максимума, т. е.

$$(\exists \delta > 0 \forall x')\ (0 < |x' - x| < \delta \Rightarrow f(x') < f(x)).$$

2. Множество точек плоскости Oxy, расположенных между лучами $f_+(x_0)$, $f^+(x_0)$ и между лучами $f_-(x_0)$, $f^-(x_0)$ (включая сами лучи), называют *контингенцией* $K = K(f, x_0)$ функции f в точке x_0. Точнее, $(x, y) \in K(f, x_0)$, если

$$x = x_0 \text{ и } y = y_0,$$

$$\text{или } x < x_0 \text{ и } f_-(x_0) \leqslant \frac{y - y_0}{x - x_0} \leqslant f^-(x_0),$$

$$\text{или } x > x_0 \text{ и } f_+(x_0) \leqslant \frac{y - y_0}{x - x_0} \leqslant f^+(x_0),$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Понятие контингенции полезно для формулировки следующей теоремы, составляющей основное содержание этого параграфа.

Теорема (А. Данжуа). *Почти в каждой точке x* (определения f) *контингенция $K(f, x)$ является одной из следующих фигур*:

(1) *прямой* (невертикальной),

(2) *полуплоскостью* (нелевой и неправой),

(3) *плоскостью.*

Иными словами — *почти для всех x выполняется одно из следующих условий*:

(1) $f_-(x) = f^-(x) = f_+(x) = f^+(x) \neq \pm\infty$;

(2) $f_-(x) = -\infty$, $f^+(x) = +\infty$, $f^-(x) = f_+(x) \neq \pm\infty$;

(2′) $f_-(x) = +\infty$, $f_+(x) = -\infty$, $f_-(x) = f^+(x) \neq \pm\infty$;

(3) $f_-(x) = f_+(x) = -\infty$, $f^-(x) = f^+(x) = +\infty$.

Эту теорему Данжуа открыл для непрерывных функций. Ее дополнил Н. Лузин, показавший, что производная измеримой функции обращается в $\pm\infty$ лишь на множестве меры нуль. Впоследствии выяснилось, что теорема верна для всех конечных функций (хотя бы и неизмеримых).

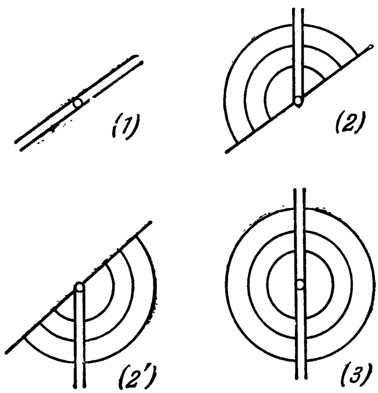


Рис. 4.3.

Расположение производных чисел в типичных случаях иллюстрирует рис. 4.3.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. $\mu\{f^+(x) = -\infty\} = 0$.

Доказательство. Допустим, что рассматриваемое множество $T = \{f^+(x) = -\infty\}$ имеет $\bar{\mu}T > 0$. Для каждого $x \in T$ найдется такое натуральное n, что

$$\text{если } x < x'' < x + 1/n, \text{ то } f(x'') < f(x). \qquad (*)$$

Пусть T_n состоит из точек $x \in T$, удовлетворяющих условию (*). Тогда $T = \bigcup T_n$, и некоторое T_n будет $\bar{\mu} T_n > 0$.

Это T_n имеет точки внешней плотности. Вокруг одной из них выберем интервал $l = (a, b)$ с концами $a, b \in T_n$ и длиной $\mu l < 1/n$. Пусть E — точки внешней плотности lT_n, принадлежащие lT_n, так что $\bar{\mu} E = \bar{\mu}(lT_n) > 0$.

Возьмем $N > 0$. Поскольку $f^+(x) = -\infty$ для $x \in E$ и точки $x \in E$ предельны справа для точек E, то к каждому $x \in E$ сходится последовательность $x_p \to x$, для которой $(p = 1, 2, \ldots)$:

$$x_p > x, \ x_p \in E, \ f(x_p) - f(x) < -N \cdot (x_p - x).$$

Система $S = \{[x, x_p]\}$ отрезков $[x, x_p]$, взятых для всех $x \in E$ и $p = 1, 2, \ldots$, покрывает E по Витали. Из нее можно выбрать конечное число неналегающих отрезков $d_k = [a_k, b_k]$ с суммой длин

$$\sum \mu\, d_k > \bar{\mu} E/2.$$

Точки $\{a_k, b_k\}$ разбивают (a, b) на конечное число отрезков $d_k = [a_k, b_k]$ и конечное число оставшихся интервалов $\Delta_k = (u_k, v_k)$. На отрезке d_k

$$f(b_k) - f(a_k) < -N \cdot (b_k - a_k).$$

Суммарно по всем d_k

$$\sigma_1 \equiv \sum [f(b_k) - f(a_k)] < -N \sum \mu\, d_k.$$

У интервала $\Delta_k = (u_k, v_k)$ оба конца $u_k, v_k \in E \subseteq T_n$ и лежат на отрезке $[a, b]$. Поэтому

$$f(v_k) - f(u_k) < 0$$

и суммарно по всем Δ_k

$$\sigma_2 \equiv \sum [f(v_k) - f(u_k)] < 0.$$

Приращение $f(b) - f(a)$ равно сумме приращений f на d_k и Δ_k. Следовательно,

$$f(b) - f(a) = \sigma_1 + \sigma_2 < -N \bar{\mu} E/2.$$

И так как N произвольно, то $f(b) - f(a) = -\infty$, вопреки определению f. Лемма 1 доказана.

Следствие. Применяя лемму 1 к $g(x) = -f(x)$, получаем

$$\mu\{f_+(x) = +\infty\} = \mu\{g^+(x) = -\infty\} = 0.$$

Таким образом, $\mu\{f_+(x) = \infty\} = \mu\{f^+(x) = -\infty\} = 0$, т. е. *правая производная функции f обращается в $\pm\infty$ лишь на множестве меры нуль.* Поэтому лемма 1 уже содержит цитированную теорему Н. Лузина.

Лемма 2. $\mu\{f^+(x) < f_-(x)\} = 0$.

Докажем, что рассматриваемое множество (назовем его T) не более чем счетно. Для каждого $x \in T$ найдется рациональное r такое, что

$$f^+(x) < r < f_-(x). \tag{1}$$

Обозначим через T_r множество всех $x \in T$, удовлетворяющих условию (1). Тогда $T = \bigcup T_r$.

У функции $g(x) = f(x) - r\cdot x$ производные числа $g^+(x) = f^+(x) - r$ и $g_-(x) = f_-(x) - r$. Поэтому

$$\{g^+(x) < 0 < g_-(x)\} = T_r.$$

Теперь для каждого $x \in T_r$ найдется натуральное n такое, что

$$\text{если } 0 < |x' - x| < 1/n, \text{ то } g(x') < g(x). \tag{2}$$

Обозначим через T_{rn} множество всех $x \in T_r$, удовлетворяющих условию (2). Тогда $T_r = \bigcup T_{rn}$. Но две точки из одного T_{rn} не могут находиться на расстоянии меньше $1/n$. Значит, счётны все множества

$$T_{rn}, \quad T_r = \bigcup T_{rn}, \quad T = \bigcup T_r.$$

Лемма 3. $\mu\{-\infty < f_-(x) < f^+(x) < \infty\} = 0$.

Доказательство. Допустим, что рассматриваемое множество (T) имеет $\bar{\mu}T > 0$.

Для каждого $x \in T$ найдутся рациональные r, s и натуральные m, n, при которых

1) $-m < f_-(x) < r < s < f^+(x) < m$,

2) если $x - 1/n < x' < x < x'' < x + 1/n$, то

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} > -m, \qquad \frac{f(x'') - f(x)}{x'' - x} < m.$$

Обозначим через $T(r, s, m, n)$ множество всех $x \in T$, удовлетворяющих условиям 1) и 2). Поскольку система $\{T(r, s, m, n)\}$, по всевозможным r, s, m, n, всего лишь счетна и покрывает множество T, то хотя бы одно из множеств системы — пусть это будет $H = T(r, s, m, n)$ — имеет $\overline{\mu}H > 0$.

H имеет точки внешней плотности. Окружим одну из них интервалом $l = (a, b)$ с условиями

$$a, b \in H, \quad \mu l < 1/n, \quad \overline{\mu}(lH) > (1 - \delta)\mu l,$$

где $0 < \delta < 1/2$, а в остальном — произвольно.

Обозначим через E множество точек внешней плотности множества lH, принадлежащих lH. Тогда $\overline{\mu}E = \overline{\mu}(lH)$, и к каждой точке E сходятся две последовательности $x'_p \to x - 0$ и $x''_p \to x + 0$ точек из E, для которых $p = 1, 2, \ldots$)

$$\frac{f(x'_p) - f(x)}{x'_p - x} < r < s < \frac{f(x''_p - f(x)}{x''_p - x}.$$

Система $S' = \{[x'_p, x]\}$ отрезков $[x'_p, x]$, взятых для всех $x \in E$ и $p = 1, 2, \ldots$, покрывает E по Витали. Из нее можно выбрать конечное число отрезков $d'_k = [a'_k, b'_k]$ с суммой длин

$$\Sigma \mu d_k > (1 - 2\delta)\mu l.$$

Аналогичным образом из $S'' = \{[x, x''_p]\}$ можно выбрать конечное число отрезков $d''_k = [a''_k, b''_k]$ с

$$\Sigma \mu d''_k > (1 - 2\delta)\mu l.$$

Чтобы привести к противоречию допущение $\overline{\mu}T > 0$, сосчитаем двумя способами разность $f(b) - f(a)$.

П е р в ы й с п о с о б. Интервал (a, b) разбит на конечное число отрезков $d'_k = [a'_k, b'_k]$ и конечное число оставшихся интервалов $\Delta'_k = (u'_k, v'_k)$. Отрезок d'_k есть некоторое $[x'_p, x]$. Для него

$$\frac{f(a'_k) - f(b'_k)}{a'_k - b'_k} < r \text{ и } f(b'_k) - f(a'_k) < r\,\mu\Delta'_k.$$

Суммарно по всем d'_k будет

$$\sum [f(b'_k) - f(a'_k)] < r \sum \mu \Delta'_k.$$

У интервала $\Delta'_k = (u'_k, v'_k)$ оба конца u'_k, $v'_k \in H$ и $v'_k - u'_k < 1/n$. Поэтому

$$\frac{f(v'_k) - f(u'_k)}{v'_k - u'_k} < m \text{ и } f(v'_k) - f(u'_k) < m\mu\Delta'_k.$$

Суммарно по всем Δ'_k будет

$$\sum [f(v'_k) - f(u'_k)] < m \sum \mu \Delta'_k.$$

Разность $f(b) - f(a)$ складывается из этих двух сумм:

$$f(b) - f(a) < r \sum \mu d'_k + m \sum \mu \Delta'_k.$$

Подставляя $\sum \mu d'_k = \mu l - \sum \mu \Delta'_k$ и $\sum \mu \Delta'_k < 2\delta\mu l$, получаем

$$[f(b) - f(a)]/\mu l < r + 2(m - r)\delta.$$

Но $\delta > 0$ выбиралось после того, как $-m < r < s < m$ были фиксированы. Поэтому для достаточно малых $\delta > 0$ будет

$$[f(b) - f(a)]/\mu l < r. \qquad (1)$$

Второй способ. Интервал (a, b) разбивается на конечное число отрезков $d''_k = [a''_k, b''_k]$ и конечное число оставшихся интервалов $\Delta''_k = (u''_k, v''_k)$.

Отрезок d^k есть некоторое $[x, x''_p]$. На нем

$$\frac{f(b''_k) - f(a''_k)}{b''_k - a''_k} > s \text{ и } f(b''_k) - f(a''_k) > s\mu d''_k.$$

У интервала $\Delta''_k = (u''_k, v''_k)$ оба конца u''_k, $v''_k \in H$ и $v''_k - u''_k < 1/n$. Поэтому

$$\frac{f(v''_k) - f(u''_k)}{v''_k - u''_k} > -m \text{ и } f(v''_k) - f(u''_k) > -m\mu\Delta''_k.$$

Суммарно по всем d_k'' и Δ_k'' будет

$$f(b)-f(a)>s\sum\mu\, d_k''-m\sum\mu\,\Delta_k''.$$

Поставляя $\sum\mu\, d_k''=\mu l-\sum\mu\,\Delta_k''$ и $\sum\mu\,\Delta_k''<2\delta\mu l$, имеем

$$[f(b)-f(a)]/\mu l>s-2(s+m)\delta.$$

И для достаточно малых $\delta>0$ будет

$$[f(b)-f(a)]/\mu l>s. \qquad (2)$$

Оценки (1) и (2) несовместимы для $r<s$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. $\mu\{-\infty=f_-(x)\neq f^+(x)<\infty\}=0$.

Доказательство. Если это не так, то и при некотором натуральном m

$$\bar{\mu}\{-\infty=f_-(x)\neq f^+(x)<m\}>0. \qquad (*)$$

Обозначим множество (*) через T_m, а через T_{mn} — те точки $x\in T_m$, для которых

$$\text{если } x<x''<x+1/n, \text{ то } \frac{f(x'')-f(x)}{x''-x}<m.$$

При некотором натуральном n множество $H=T_{mn}$ будет $\bar{\mu}H>0$.

Возьмем интервал $l=(a, b)$ с условиями

$$a, b\in H,\quad \mu l<1/n,\quad \bar{\mu}(lH)>0.$$

Зафиксируем число $N>0$. Поскольку $f_-(x)=-\infty$ при $x\in H$, то к каждой точке $x\in lH$ стягивается последовательность $x_p\to x$, для которой $(p=1, 2, \ldots)$

$$a<x_p<x<b,\quad \frac{f(x_p)-f(x)}{x_p-x}<-N.$$

Система $\{[x_p, x]\}$, взятая для всех $x\in lH$ и p, покрывает lH по Витали. Из нее можно выбрать конечное число отрезков $d_k=[a_k, b_k]$ с суммой длин

$$\sum\mu\, d_k>\bar{\mu}(lH)/2.$$

Концы a_k, b_k отрезков d_k разбивают l на конечное число отрезков d_k и конечное число оставшихся интервалов $\Delta_k=(u_k, v_k)$.

Отрезок $d_k = [a_k, b_k]$ является некоторым $[x_p, x]$. На нем

$$f(b_k) - f(a_k) < -N(b_k - a_k).$$

И суммарно по всем d_k

$$\sum [f(b_k) - f(a_k)] < -N \sum \mu d_k < -N \bar{\mu} (lH)/2.$$

У интервала $\Delta_k = (u_k, v_k)$ левый конец $u_k \in H$, а правый $v_k - u_k < 1/n$. На нем

$$f(v_k) - f(u_k) < m(v_k - u_k).$$

И суммарно по всем Δ_k

$$\sum [f(v_k) - f(u_k)] < m \sum \mu \Delta_k < m\mu l.$$

Таким образом,

$$f(b) - f(a) < -N\bar{\mu}(lH)/2 + m\mu l.$$

Но $N > 0$ — любое. Значит, $f(b) - f(a) = -\infty$, чего не может быть. Лемма 4 доказана.

Собирая леммы 2, 3, 4, получаем лемму 5.

Лемма 5. $\mu\{f_-(x) \neq f^+(x) < \infty\} = 0$.

Лемма 6. *Почти для всех* $x \in L$

$$f^+(x) = \infty \text{ или } f_-(x) = f^+(x) \neq \pm\infty \qquad (*)$$

Доказательство. Удалим из L два множества

$$\{f^+(x) = -\infty\} \text{ и } \{f_-(x) \neq f^+(x) < \infty\}.$$

В оставшихся точках x выполнится условие (*), а удаленные множества имеют меру нуль по леммам 1 и 5.

Доказательство теоремы. Почти в каждой точке $x \in L$ выполняются следующие два условия:

1°. $\quad f^+ = +\infty$ или $f_- = f^+ \neq \pm\infty$.

2°. $\quad f_- = -\infty$ или $f^+ = f_- \neq \pm\infty$.

Действительно, первое условие выполняется почти всюду по лемме 6, а второе — получается применением первого к функции $g(x) = f(-x)$. Оба условия можно объединить в одно: почти всюду

1°°. $f_- = f^+ \neq \pm\infty$ или ($f^+ = +\infty$ и $f_- = -\infty$).

Применяя это утверждение к $g(x) = -f(-x)$, получаем, что почти всюду

$$2^{\circ\circ}.\ f_+ = f^- \neq \pm\infty \quad \text{или} \quad (f_+ = -\infty \ \text{ и } \ f^- = +\infty).$$

Удалим из L точки x, где нарушаются условия $1^{\circ\circ}$ или $2^{\circ\circ}$. Оставшиеся точки разделяются на четыре группы.

$$1) \qquad f_- = f^+ \neq \pm\infty \ \text{ и } \ f_+ = f^- \neq \pm\infty.$$

Для этих точек

$$f_- = f^+ \geqslant f_+ = f^- \geqslant f_- \neq \pm\infty$$

и, значит,

$$\begin{array}{lllll} 1) & & f_- = f^+ = f_+ = f^- \neq \pm\infty; & & \\ 2) & f_+ = f^- \neq \pm\infty & \text{и} & f^+ = +\infty,\ f_- = -\infty; \\ 2') & f_- = f^+ \neq \pm\infty & \text{и} & f_+ = -\infty,\ f^- = +\infty; \\ 3) & f_- = f_+ = -\infty & \text{и} & f^- = f^+ = +\infty. \end{array}$$

Но это и есть группы 1, 2), 2′), 3) теоремы Данжуа. Теорема доказана.

Распространим теорему Данжуа на функцию f, заданную на произвольном множестве E. Для этого сперва продолжим f на $\bar{E}$:

$$f(x) = \overline{\lim_{x' \to x}} f(x') \quad \text{по} \quad x' \in E \quad \text{для} \quad x \in \bar{E} \setminus E,$$

а затем линейно на интервалы (a, b) смежности $\bar{E}$ (непрерывно в точках a, b). Нетрудно проверить, что при этом производные числа f на E не изменятся и лишь могут появиться в изолированных (слева или справа) точках E. Но таких точек счетное множество. Тем самым теорема Данжуа доказана для любой конечной функции, определенной на любом множестве.

Из теоремы Данжуа легко выводится

Теорема (А. Лебега). *Монотонная функция имеет почти всюду конечную производную.*

Доказательство. Пусть f монотонно не убывает. Тогда разностное отношение

$$[f(x') - f(x)]/(x' - x) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x' \neq x.$$

Поэтому все производные числа функции f не отрицательны и из четырех возможностей теоремы Данжуа 1), 2), 2′), 3) остается одна — 1).

Задачи. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а $h(x)$ — производное число от $f(x)$ некоторого фиксированного типа (например, $h(x) = f^{+}(x)$. Тогда:

1) $$[f(b) - f(a)]/(b - a) \lesseqgtr \begin{matrix}\sup \\ \inf\end{matrix}\ h(x) \text{ по } x \in [a, b].$$

2) Если $h(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует (конечная) производная $f'(x_0) = h(x)$.

3) Любое производное число конечной измеримой функции — измеримо.

Указание. Доказать, что

$$f^{+}(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sup\ [f(x+h) - f(x)]/h,$$

где sup берется по всем

$$1/m < h < 1/n.$$

Г Л А В А 5

ТРАНСФИНИТЫ

Вполне упорядоченные множества Кантор ввел, чтобы получить для измерения множеств меньший масштаб, чем мощность; и двигаясь этими более мелкими шагами от заданного множества, построить множество следующей мощности. В частности, построить первое несчетное.

Кроме того, в этой главе излагаются возможности, связанные с использованием постулата свободного выбора Э. Цермелло.

§ 1. Упорядоченные множества

Определение. Множество A называется *упорядоченным*, если для любых двух (различных) его элементов a и b объявлено одно и только одно из двух соотношений:

$$a < b \text{ или } b < a;$$

причем если a, b, c — элементы множества A, то

$$(a < b \text{ и } b < c) \text{ влечет } (a < c).$$

В случае $a < b$ пишут также $b > a$ и говорят, что a меньше b, или a предшествует b (b больше a, или b следует за a).

Несколько примеров. Множество $A = \{a, b, c\}$ упорядочено соотношениями $a < b$, $b < c$, $a < c$. Но оно не упорядочено соотношениями $a < b$, $b < c$, $c < a$, ибо из первых двух следует $a < c$, вопреки третьему.

Множество натуральных чисел можно упорядочить, объявив $m < n$, когда число m меньше числа n (этот способ упорядочения называют естественным, или упорядочением в порядке возрастания). Полученное множество будет иметь первый элемент и не будет иметь последнего. Но множество натуральных чисел можно упорядочить, и объявив $m < n$, когда число m больше числа n; полученное множество будет иметь последний элемент и не будет иметь первого.

Упорядочено множество действительных (или рациональных) чисел, рассматриваемых в их естественном порядке.

Упражнение. Пусть $A = \{a\}$ — счетное упорядоченное множество, причем: 1) в A нет ни первого, ни последнего элемента, и (2) для каждой пары элементов A найдется третий, заключенный между ними. Отобразить A взаимно однозначно на множество $R = \{r\}$ рациональных чисел $0 < r < 1$, так чтобы

$$\text{если } a_1 < a_2 \text{ в } A \text{ и } a_1 \leftrightarrow r_1,\ a_2 \leftrightarrow r_2, \text{ то } r_1 < r_2.$$

Понятие упорядоченности легко формализовать. Множество $A = \{a\}$ упорядочено, если сопровождается таким множеством $F = \{f\}$ пар $f = (a, b)$ элементов $a, b \in A$, что

(1) $(a, a) \notin F$ ни при каком a,

(2) при $a \neq b$ из двух пар (a, b) и (b, a) одна и только одна входит в F,

(3) если $(a, b) \in F$ и $(b, c) \in F$, то $(a, c) \in F$.

Таким образом, «упорядоченное множество A» — это пара множеств (A, F); и одно множество, упорядоченное двумя различными способами,— это два упорядоченных множества.

В дальнейшем будет показано, что любое множество можно упорядочить (с помощью постулата выбора).

§ 2. Вполне упорядоченные множества

Определение. *Множество вполне упорядочено, если оно упорядочено таким образом, что каждое непустое его подмножество имеет первый элемент.*

Сделаем несколько замечаний:

1) Любое конечное упорядоченное множество является вполне упорядоченным.

2) Натуральный ряд $1 < 2 < \ldots$, упорядоченный в порядке возрастания целых чисел, вполне упорядочен (доказывается с помощью постулата индукции!).

3) Множество точек интервала (a, b) или отрезка $[a, b]$ (при $a \neq b$), упорядоченное условием: $x_1 < x_2$, если точка x_1 левее точки x_2,— не вполне упорядочено. В обоих случаях подмножество (a, b) не содержит самой левой точки.

4) Множество отрицательных целых чисел, в порядке:

$$\ldots < -n < \ldots \quad \ldots < -2 < -1,$$

не содержит первого элемента и, значит, не вполне упорядочено.

5) Множества

(1) $a_1, a_2, \ldots, b_1$;

(2) $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots,$

(3) $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots, \ldots$

упорядоченные в порядке написания слева направо, вполне упорядочены.

6) Множество (упорядоченное в порядке написания)

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \ldots, b_n, \ldots, b_2, b_1$$

не вполне упорядочено.

Множество вполне упорядочено тогда и только тогда, когда не содержит падающей цепочки (т. е. бесконечной убывающей последовательности).

Действительно, если такая цепочка есть, то она является множеством без первого элемента. Пусть, с другой стороны, $B \subseteq A$ и в B нет первого элемента. Возьмем $b_1 \in B$. Так как b_1 — не первый элемент B, то найдется $b_2 \in B$ такое, что $b_2 < b_1$. Но b_2 — тоже не первый и найдется $b_3 < b_2$ и т. д.

Подмножество $B \subseteq A$ вполне упорядоченно о A само является вполне упорядоченным, в силу отношений порядка, унаследованных от A (т. е. имеющихся между элементами B, как элементами A).

Каждый элемент a упорядоченного множества A определяет *отрезок* $A\,[a]$, состоящий из элементов $< a$. Отрезок $A\,[a]$ вполне упорядоченного A — сам вполне упорядочен в силу отношений порядка, имеющихся в A. Стоит заметить, что среди отрезков есть пустой (отрезок первого элемента), но нет отрезка, совпадающего со всем исходным множеством.

Упражнение. Пусть $A = \{a\}$ вполне упорядочено и $A_1 \subseteq A$. Если

$$\text{из } a < a_1 \in A_1 \text{ следует } a \in A_1,$$

или

$$\text{из } a > a_2 \notin A_1 \text{ следует } a \notin A_1,$$

то A_1 совпадает с A или является его отрезком.

Два упорядоченных множества $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$ называются *подобными*, если существует взаимно однозначное соответствие $f(a) = b$, сохраняющее порядок, т. е. если

$$a_1 < a_2 \text{ в } A \text{ влечет } f(a_1) < f(a_2) \text{ в } B.$$

Само отображение f, сохраняющее порядок, называется *подобием*.

Вполне упорядоченное множество может оказаться подобным своему подмножеству. Например, подобны множества

$$\{1 < 2 < \ldots\}, \quad \{2 < 3 < \ldots\}, \quad \{2 < 4 < 6 < \ldots\}.$$

Но имеет место важная

Лемма (основная). *Если вполне упорядоченное множество $A = \{a\}$ подобно отображено на свое подмножество, то образ $f(a) \geqslant a$ для каждого $a \in A$.*

Действительно, иначе существовал бы первый элемент $a' \in A$, образ которого $b' = f(a') < a'$. Но тогда $f(b') < f(a') = b'$ и, следовательно, a' — не первый элемент, обладающий этим свойством.

Следствия. (1) Вполне упорядоченное A не может быть подобно отображено внутрь собственного отрезка. Действительно, при таком отображении $f(A)$ внутрь $A[a]$ было бы $f(a) < a$ (вопреки лемме).

(2) Если A и B вполне упорядочены, то A может быть подобно не более чем одному отрезку множества B.

(3) Единственное подобное отображение вполне упорядоченного A на себя является тождеством.

§ 3. Длина

Мы говорим, что два вполне упорядоченных множества A и B имеют *одинаковую длину*, или что A *короче* B (то же самое: B длиннее A), и пишем

$$\|A\| = \|B\|, \text{ или } \|A\| < \|B\| \text{ (то же: } \|B\| > \|A\|\text{)},$$

когда A подобно B, или когда A подобно отрезку B.

Отношение $\|A\| < \|B\|$ транзитивно, а отношение $\|A\| = \|B\|$ обладает всеми свойствами эквивалентности. Кроме того, эти отношения сохраняются при замене A и B множествами $\|A^*\| = \|A\|$ и $\|B^*\| = \|B\|$.

Теорема (основная). *Для двух вполне упорядоченных множеств A и B имеет место одно и только одно из* *соотношений:*

$$\|A\| = \|B\|, \; \|A\| < \|B\|, \; \|A\| > \|B\|. \qquad (*)$$

Доказательство. Сперва заметим, что эти соотношения исключают друг друга. Действительно, если существует подобное отображение f множества A на отрезок $B\,[b]$ и подобное отображение g множества B на A или его отрезок, то отображение $h = g\,(f)$ (сперва выполняется f, потом g) будет подобным отображением A на его отрезок $A\,[g\,(b)]$, что невозможно. В частности, доказано, что

$$\text{из } \|B\,[b']\| < \|B\,[b'']\| \text{ следует } b' < b''$$
$$\text{для любых } b',\; b'' \in B.$$

Длиннее показать, что одно из соотношений $(*)$ действительно имеет место. Для этого определим некоторые подобные множества

$$A_* = \{a_*\} \subseteq A \quad \text{и} \quad B_* = \{b_*\} \subseteq B$$

и покажем, что $A_* = A$ или $B_* = B$.

Если два отрезка $A\,[a]$ и $B\,[b]$ подобны, то отнесем a и b к множествам A_* и B_* и положим $f\,(a) = b$. По предыдущей лемме отрезок $A\,[a]$ может быть подобен лишь по одному отрезку $B\,[b]$, и отрезок $B\,[b]$ — лишь одному $A\,[a]$. Поэтому f дает взаимно однозначное отображение A_* на B_*. Более того, f подобно отображает A_* на B_*. Действительно, если $a_*' < a_*''$ — элементы A_* и b_*', b_*'' — их образы, то

$$\|B\,[b_*']\| = \|A\,[a_*']\| < \|A\,[a_*'']\| = \|B\,[b_*']\|,$$

и, значит, $b_*' < b_*''$, как уже доказано. Итак $\|A_*\| = \|B_*\|$.

Покажем, что A_* совпадает с A или является его отрезком. Зафиксируем $a_*' \in A_*$ и $a'' \in A$, для которых $a'' < a_*'$. Множество $A' = A\,[a_*']$ подобно отображается на $B' = B\,[f\,(a_*')]$ некоторой функцией φ. Следовательно, $A'\,[a'']$ подобно отображается функцией φ на множество $B'\,[\varphi\,(a'')]$. Но $A'\,[a''] = A\,[a'']$ и $B'\,[\varphi\,(a'')] = B\,[\varphi\,(a'')]$. Поэтому $a'' \in A_*$, по определению множества A_*. Итак:

$$\text{из } A \ni a'' < a_*' \in A_* \text{ следует } a'' \in A_*.$$

Таким образом, A_* совпадает с A или является его отрезком. Аналогично устанавливается, что B_* совпадает с B или является его отрезком.

Покажем, что $A_* = A$ или $B_* = B$. Действительно, иначе $A_* = A\,[a^0]$, $B_* = B\,[b^0]$ и $A\,[a^0]$ подобно $B\,[b^0]$. Но тогда $a^0 \in A_* = A\,[a^0]$, что невозможно.

В случае $A_* = A$ будет $\| A \| = \| B_* \| \leqslant \| B \|$, а в случае $B_* = B$ будет $\| B \| = \| A_* \| \leqslant \| A \|$. Ч. т. д.

Следствие. *Любые два вполне упорядоченных множества сравнимы по мощности.*

Замечание. Пусть A и B вполне упорядочены. Если $\| A \| = \| B \|$, то $| A | = | B |$. Если $\| A \| < \| B \|$, то $| A | \leqslant | B |$, причем не исключен и случай равенства. Поэтому мощность нам представляется более грубой мерой, чем длина.

Задача. В любой системе $\mathscr{A} = \{A\}$ вполне упорядоченных множеств A имеется самое короткое. Доказать.

Решение. Возьмем $A_0 \in \mathscr{A}$. Если A_0 — кратчайшее, то все доказано. Если же это не так, то всякое $A_1 \in \mathscr{A}$ с длиной $\|A_1\| < \| A_0 \|$ подобно некоторому отрезку множества A_0. Среди таких отрезков есть минимальный и множество A_2, порождающее его, является кратчайшим среди элементов $\mathscr{A}$.

Следствие. *Система вполне упорядоченных множеств попарно различных длин сама вполне упорядочена по длине составляющих ее множеств.*

Вполне упорядоченное множество легко удлинить, добавив к нему еще один последний элемент. Если имеется несколько вполне упорядоченных множеств, то можно построить множество, которое длиннее заданных. Это легко получается из нижеследующей теоремы.

Теорема о верхней грани. *Для системы $\mathscr{A} = \{A\}$ вполне упорядоченных множеств A найдется такое вполне упорядоченное B, что*

$$(\forall A \in \mathscr{A})\,(\| A \| \leqslant \| B \|), \tag{1}$$

$$(\forall b \in B\, \exists A \in \mathscr{A})\,(\| A \| > \| B\,[b] \|). \tag{2}$$

Доказательство. Множества A можно считать station неналегающими, иначе каждое $A = \{a\}$ мы заменим эквивалентным ему множеством $A^* = \{(A,\ a)\}$. Введем $S = \bigcup A$ по всем $A \in \mathscr{A}$.

Элементы $a_1 \in A_1$ и $a_2 \in A_2$ множеств A_1 и A_2 из $\mathscr{A}$ отнесем к одному классу b, если $\| A_1\ [a_1] \| = \| A_2\ [a_2] \|$.

Таким образом, каждый элемент $s \in S$ однозначно определяет множество $A \ni s$ и класс $b \ni s$.

Множество $B = \{b\}$ всех классов b упорядочим правилом: $b_1 < b_2$ в B, когда

$$\| A_1 [a_1] \| < \| A_2 [a_2] \| \text{ для } b_1 \ni a_1 \in A_1 \text{ и } b_2 \ni a_2 \in A_2.$$

Какие при этом берутся a_1 и a_2 из b_1 и b_2 здесь, разумеется, безразлично.

Нетрудно проверить, что каждый отрезок $B\,[b]$ подобен $A\,[a]$ — для $a \in b$ и $A \ni a$. Отсюда вытекает, что B вполне упорядочено и удовлетворяет условию (2). Но и любой отрезок $A\,[a]$ множества $A \in \mathcal{A}$ подобен $B\,[b]$ для $b \ni a$. Поэтому выполняется условие (1), и теорема доказана.

Замечание. Длины вполне упорядоченных множеств Кантор называл трансфинитными числами (или трансфинитами). Мы не определяем понятия длины, а говорим лишь о равенстве длин множеств, о том, что длина одного множества меньше длины другого и т. п. Это избавляет нас от некоторых логических затруднений.

§ 4. Построение множества следующей мощности

Будем говорить, что множества A и B вполне упорядочены существенно разными способами, если $\| A \| \neq \| B \|$.

Теорема. *Пусть A вполне упорядочено, и T есть множество существенно разных *) способов вполне упорядочить подмножества A. Тогда мощность T непосредственно следует за мощностью A.*

Пояснение. Теорема утверждает, что $|A| < |T|$ и не существует B, для которого $|A| < |B| < |T|$. Если Вам формулировка теоремы кажется слишком общей, можете принять $A = \{1 < 2 < \ldots\}$, и тогда T будет первым несчетным множеством.

Доказательство. $T = \{t\}$, где t — способ вполне упорядочить некоторое подмножество A; $\tau(t)$ — какое-нибудь множество, вполне упорядоченное по способу t.

---

*) Формально, здесь способ вполне упорядочить — это класс, состоящий из всех подмножеств A, вполне упорядоченных до одинаковой длины.

Множество T мы упорядочим, приняв

$$t_1 < t_2, \text{ если } \| \tau(t_1) \| < \| \tau(t_2) \|,$$

и T станет вполне упорядочено по предыдущей теореме. Наша ближайшая цель — доказать, что (рис. 5.1)

$$\| \tau(t) \| = \| T[t] \|$$

при всех $t \in T$.

Здесь, напомним, $T[t]$ — отрезок множества T, а $\tau(t)$ — подмножество A, вполне упорядоченное по способу t.

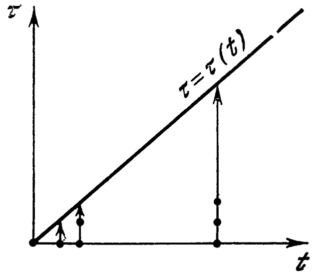


Рис. 5.1.

Пояснения. Пусть $A = \theta$, тогда существует лишь одно вполне упорядоченное множество, являющееся подмножеством A — именно θ; значит, $T = \{t_0\}$ состоит из одного элемента t_0 и $\tau(t_0) = \theta$; так что $|T| > |A|$.

Пусть $A = \{1 < 2 < 3\}$. Тогда $T = \{t_0 < t_1 < t_2 < t_3\}$, где $\tau(t_0) = \theta$, $\tau(t_1) = \{1\}$, $\tau(t_2) = \{1 < 2\}$, $\tau(t_3) = \{1 < 2 < 3\}$ и снова $|A| < |T|$. Выбор множеств $\tau(t)$, разумеется, произволен. Можно было взять $\tau(t_1) = \{2\}$, или $\tau(t_3) = \{2 < 1 < 3\}$, лишь бы $\tau(t_0)$ было пусто, $\tau(t_1)$ состояло из одного элемента и т. д.

Приступим к доказательству равенства $\| \tau(t) \| = \| T[t] \|$. Пусть t' — минимальный элемент T, для которого $\| \tau(t') \| \neq \| T[t'] \|$. Возможны следующие два случая.

1) $\| \tau(t') \| < \| T[t'] \|$. Тогда $\tau(t')$ подобно отрезку множества $T[t']$ и существует $t'' < t'$, для которого

$$\| \tau(t') \| = \| T[t''] \|.$$

Но $t'' < t'$, значит, $\| T[t''] \| = \| \tau(t'') \|$. Тогда

$$\| \tau(t') \| = \| T[t'] \| = \| \tau(t'') \|,$$

что невозможно для $t' \neq t''$.

2) $\| \tau(t') \| > \| T[t'] \|$. Тогда $T[t']$ подобно некоторому отрезку τ_* множества $\tau(t')$. Это τ_* — есть подмножество A, вполне упорядоченное определенным образом. Значит, существует t'' такое, что $\| \tau_* \| = \| \tau(t'') \|$. И так

как $\| \tau(t'') \| = \| \tau_* \| = \| T[t'] \| < \| \tau(t') \|$, то $t'' < t'$. Следовательно, $\| \tau(t'') \| = \| T[t''] \|$. Таким образом,

$$\| T[t'] \| = \| T[t'] \|,$$

что снова невозможно для $t' \neq t''$.

Равенство $\| \tau(t) \| = \| T[t] \|$ доказано для всех $t \in T$.

A вполне упорядочено, так что существует $t' \in T$, для которого $\| \tau(t') \| = \| A \|$. Значит,

$$\| A \| = \| T[t'] \| \quad \text{и} \quad | A | = | T[t'] | \leqslant | T |.$$

Если бы $| A | = | T |$, то взаимно однозначное соответствие A и T доставляло бы вполне упорядоченное множество A'' (из элементов A), подобное T. И для некоторого $t'' \in T$ было бы $\| \tau(t'') \| = \| A'' \|$. Но тогда $\| T \| = \| A'' \| = \| \tau(t'') \| = \| T[t''] \|$, что невозможно. Итак, $| A | < | T |$.

Если, наконец, $|A| \leqslant |C| \leqslant |T|$, то $|C| = |T'|$, где $T' \subseteq T$. Тогда либо $\|T'\| = \|T\|$ и $|C| = |T'| = |T|$, либо $\|T'\| = \|T[t']\|$, и тогда $|C| = |T'| = |T[t']| = |\tau(t')| = |A'|$, где $A' \subseteq A$. Значит, $|C| \leqslant |A|$. Ч. т.д.

В частности, отправляясь от счетного множества ω, мы получаем первое несчетное множество $\aleph_1$ (называется — áлеф один). $\aleph_1$ — это множество существенно разных способов вполне упорядочить счетное множество. Или (что то же самое) множество классов вполне упорядоченных конечных и счетных множеств различной длины. Поскольку классов конечной длины имеется лишь счетное множество, то отбрасывание их не меняет мощности $\aleph_1$. Поэтому иногда говорят, что первое несчетное множество — это полный набор счетных вполне упорядоченных множеств различной длины.

Задача. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — (счетная) последовательность элементов $\aleph_1$. Тогда существует $a \in \aleph_1$, такое, что любое $a_n < a$, т. е. $\aleph_1$ не имеет счетной конфинальной последовательности (счетной последовательности, не ограниченной каким-либо элементом множества $\aleph_1$). Доказать

Решение. Рассмотрим $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \aleph_1[a_n]$. Множество A совпадает с $\aleph_1$ или является его отрезком (ибо $u < v \in A$ влечет $u \in A$). Но A счетно. Значит, A есть некоторый отрезок $\aleph_1[a]$ и любое $a_n < a$.

§ 5. Трансфинитная индукция

1. Принцип индукции.

1.1. Напомним постулат индукции для ряда $\omega = \{1, 2, \ldots\}$ натуральных чисел.

Если

(1) $1 \in B$ *и*

(2) *для каждого* $n \in \omega$ *из* $n \in B$ *следует* $n + 1 \in B$, *то* $\omega \subseteq B$.

Сложение здесь употребляется не по существу и вместо $n + 1$ можно писать n^+, обозначая так элемент, непосредственно следующий за n. Условия 1) и 2) можно объединить: *если для каждого* $n \in \omega$

$$\text{из } (k \in B \text{ при всех } k < n) \text{ следует } (n \in B), \text{ то } \omega \subseteq B.$$

В этом условии формально содержится условие (1), ибо при $n = 1$ натуральных $k < n$ нет и требование «все $k < n$ содержатся в B» выполнено; следовательно, число $n = 1$ должно войти в B.

Контрольное упражнение. Найдите ошибку в нижеследующем рассуждении.

Парадокс Б. Рассела. *Все числа равны между собой.*

Доказательство. Пусть B состоит из таких натуральных n, что любые n чисел $a_1, \ldots, a_n$ равны между собой. Тогда $1 \in B$, ибо любая группа из 1-го числа состоит из равных чисел. *Пусть* $n \in B$. Возьмем любые $n + 1$ чисел $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Образуем две группы $a_1, \ldots, a_n$ и $a_2, \ldots, a_{n+1}$. Поскольку каждая группа состоит из n чисел, то, *по предположению*, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ и $a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$. Следовательно, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$ и $n + 1 \in B$. Значит, $\omega \subseteq B$ и любые n чисел равны между собой.

Замечание 1. Зачастую при доказательстве по индукции множество B (натуральных n, обладающих нужным свойством) не упоминается, а подразумевается. В этом случае сперва проверяют, что доказываемое утверждение верно при $n = 1$ (т. е. что $1 \in B$). Затем проверяют, что если утверждение верно для n, то верно для $n + 1$ (т. е. что $n \in B$ влечет $n + 1 \in B$).

Замечание 2. Обе приведенные формулировки постулата индукции эквивалентны для ряда ω. Но при замене ω произвольным вполне упорядоченным множеством A первая формулировка становится неверной. Пусть, например, $A = \{1, 2, \ldots; p\}$, $B = \{1, 2, \ldots\}$. Тогда $1 \in B$, и при любом $a \in A$ из $(a \in B)$ следует $(a^+ \in B)$. Но $B \not\supseteq A$.

1.2. Теорема индукции. *Пусть $A = \{a\}$ вполне упорядочено и B — любое множество. Если для каждого $a \in A$ из $(\forall a' < a,\ a' \in B)$ следует $(a \in B)$, то $A \subseteq B$.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть a — первый элемент A, не принадлежащий B. Тогда

$$(\forall a' < a)(a' \in B)$$

(даже в случае, когда a — первый элемент из A и элементов $a' < a$ нет) и, значит, $a \in B$, вопреки выбору a. Теорема доказана.

Вопрос. Мы доказали теорему индукции для любого вполне упорядоченного множества. Почему же для натурального ряда чисел ее принимают как постулат?

Ответ. При аксиоматическом определении ряда натуральных чисел (предложенном Пеано) доказательство полной упорядоченности этого ряда проводится с помощью постулата индукции (5-го постулата Пеано).

2. Построение по индукции на вполне упорядоченном множестве мало отличается от построения по индукции на ряде натуральных чисел ω. Однако уже правило построения по индукции на ω формулируется довольно сложно, если его излагать аккуратно. И поскольку построение по индукции употребляется для доказательства принципиальных теорем, мы выясним возникающие затруднения и дадим общую формулировку правила. Читатель волен опустить описание трудностей и сразу перейти к п. 2.3, где излагается решение вопроса.

2.1. Начнем с бытующей формулировки:

> если *у нас есть правило* для получения $f(n)$ по вектору $(f(1), \ldots, f(n-1))$*) при любом натуральном n, то этим определена единственная функция $f = f(n)$.

При переводе на язык теории функций фраза «у нас есть правило» должна означать «задана функция», и вся формулировка примет вид:

> если задана функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ **), то существует и единственная функция f, для которой $f(n) = F(f(1), \ldots, f(n-1))$ при всех $n \in \omega$.

И тут выясняется, что не было указано, для каких аргументов задано F. Если потребовать задания $F = F(x_1, \ldots, x_{n-1})$ для элементов x_k любой природы, то это затруднит задание и получение свойств f. Если же потребовать задания F только на векторах $(f(1), \ldots$ $\ldots, f(n-1))$, то придется заранее построить функцию $f(n)$, не пользуясь индукцией.

Выход из затруднения может быть найден в том, чтобы множество $\Phi = \{\varphi\}$, на котором определено $F = F(\varphi)$, содержало векторы (θ), $(F(\theta))$, $(F(\theta), F(F(\theta)))$, ..., но могло содержать и другие векторы.

---

*) В том числе и по пустому вектору (θ), который получается при $n = 1$.

**) От векторов различного числа измерений n.

Тогда правило примет следующий вид:

Пусть F определено на $\Phi = \{\varphi\}$ и удовлетворяет условиям:
(1) *Пустой вектор* $(\theta) \in \Phi$.
(2) *Если для некоторого*

$$\varphi = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \ (n = 1, 2, \ldots),$$

при любом k $(1 \leqslant k < n)$ *будет*

$$(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \Phi \ \text{и} \ x_k = F(x_1, \ldots, x_{k-1}),$$

то $\varphi \in \Phi$.

В таком случае существует и единственна f, у которой

$$f(n) = F(f(1), \ldots, f(n-1)) \ \text{при всех} \ n \in \omega.$$

К доказательству мы приступим позже. Сейчас сделаем два замечания. Условие (1) формально содержится в условии (2) при $n = 1$, когда $(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (\theta)$ и чисел k $(1 \leqslant k < n)$ не существует. Далее. Приведенное условие для построения по индукции заведомо выполняется, если Φ состоит из всех векторов $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, образованных элементами x_k некоторого множества X и $F(\varphi) \in X$ при каждом $\varphi \in \Phi$.

2.2. При индуктивном построении $f(a)$ на вполне упорядоченном $A = \{a\}$ возникает затруднение, связанное с терминологией. Функцию $F = F(\varphi)$ приходится определять не на векторах φ, а на функциях $\varphi = \varphi(\alpha)$, заданных в точках α отрезков $A[a]$. Почему бы вместо этого не взять сами значения $\varphi(\alpha)$, упорядоченные в порядке аргументов α? Потому, что нельзя образовывать множество из одинаковых элементов, которые могут встретиться среди $\varphi(\alpha)$ при разных α.

Вместо этого иногда называют функцию φ, определенную на $A[a]$, *трансфинитной последовательностью* (обобщение понятий вектора и последовательности) длины $\| A[a] \|$, и этим несколько облегчают язык изложения.

2.3. Теорема. Построение по индукции. *Пусть $\Phi = \{(\varphi, a)\}$ — набор функций φ, определенных на отрезках $A[a]$ вполне упорядоченного A:*

$$(\varphi, a) = \{(\alpha, \varphi(\alpha)) : \alpha \in A[a]\},$$

и $F = F(\varphi, a)$ определено на Φ. Если для любых a и φ на $A[a]$

$$\text{из} \ (\forall \alpha < a)(\varphi(\alpha) = F(\varphi, \alpha)) \ \text{следует} \ (\varphi, a) \in \Phi,$$

то на A существует и единственна f, для которой

$$f(a) = F(f, a) \ \text{при каждом} \ a \in A. \tag{1}$$

Доказательство единственности. Допустим, что кроме f существует еще g, удовлетворяющая условию теоремы, и a^* — первый элемент A, на котором

$f(a^*) \neq g(a^*)$. Тогда

$$f(a^*) = F(f, a^*) = F(g, a^*) = g(a^*),$$

вопреки выбору a^*. Единственность доказана.

Доказательство существования. Пусть $b \in A$ таково, что на $\{a : a \leqslant b\}$ существует функция f_b, для которой

$$(f_b, a) \in \Phi \text{ и } f_b(a) = F(f_b, a) \quad \text{при каждом } a \leqslant b. \qquad (2)$$

Если $b' < b$, то b' тоже обладает этим свойством. Поэтому рассматриваемые элементы b образуют множество B, равное A или $A\,[a^0]$. Более того, по уже доказанной единственности функции f_b на $\{a : a \leqslant b\}$:

$$f_{b'}(a) = f_{b''}(a) \quad \text{при} \quad a \leqslant b' \leqslant b'' \in B.$$

Пользуясь этим, определим на B функцию $f(b) = f_b(b)$. Для нее

$$(f, b) \in \Phi \text{ и } f(b) = F(f, b) \quad \text{при каждом } b \in B. \qquad (3)$$

Если $B = A\,[a^0]$, например B пусто, то

$$(f, b) \in \Phi \text{ и } f(b) = F(f, b) \quad \text{при каждом } b < a^0.$$

Но тогда, по условию теоремы, $(f, a^0) \in \Phi$. Доопределим $f(a^0) = F(f, a^0)$. Теперь f определена на $\{a : a \leqslant a^0\}$ и

$$(f, a) \in \Phi \text{ и } f(a) = F(f, a) \quad \text{при каждом } a \leqslant a^0.$$

Следовательно, $a^0 \in B = A\,[a^0]$, что невозможно. Значит, $B = A$ и условие (3) совпадает с доказываемым условием (1).

Замечание. Полезность теоремы о построении по индукции в том, что Φ может для каждого $a \in A$ содержать много пар (φ, a) с разными φ.

Следствие. *Пусть A и B — множества, A вполне упорядочено. Пусть $F = F(\varphi, a)$ определено для любого $a \in A$ и любой функции φ, заданной на $A\,[a]$ и принимающей значения $\varphi(\alpha) \in B$ при $\alpha < a$. Пусть, наконец, $F(\varphi, a) \in B$ для каждой пары таких φ и a. Тогда на A существует и единственна функция f, у которой*

$F(f, a)$ определено и $f(a) = F(f, a)$ для каждого $a \in A$.

Это следствие является частным случаем предыдущей теоремы, достаточным для приложений. Если формулировка теоремы показалась Вам слишком трудной, то докажите самостоятельно «следствие», руководствуясь доказательством теоремы.

Построение по индукции является необходимым рабочим аппаратом теории функций.

Определим, для примера, по индукции $f(n)$ для всех $n \in \omega$, полагая:

$$f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(n) = f(n-2) + f(n-1) \text{ при } n > 2.$$

Тем самым $f(n)$ определено для всех $n \in \omega$. Действительно, здесь

$$F(\varphi, 1) = 1,\ F(\varphi, 2) = 1,\ F(\varphi, n) = \varphi(n-2) + \varphi(n-1),$$

и функцию $F(\varphi, n)$ можно считать определеннной на $\{(\varphi, n)\} = \Phi$ при любых действительных функциях $\varphi(k)$ натурального аргумента k, ибо тогда $F(\varphi, n)$ — тоже действительное число. Можно в качестве $\Phi = \{(\varphi, n)\}$ взять φ, принимающие только натуральные значения. Но можно было наконец считать $F(\varphi, n)$ определенным лишь для самой последовательности Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., если бы мы заранее нашли ее члены.

3. В приложениях встречается и построение по неполной индукции, когда построение может (или должно) оборваться.

Теорема. *Пусть $F = F(\varphi, a)$ определена для всех $(\varphi, a) \in \Phi$ (но никаких более условий на F и Φ не наложено). Тогда найдутся множество A_1, равное A или $A[a']$, и функция $f = f(a)$, такие, что:*

(1) *При любом $a \in A_1$ функция $f(a)$ определена,*

$$(f, a) \in \Phi \text{ и } f(a) = F(f, a).$$

(2) *Если $A_1 = A[a^0]$, то $(f, a^0) \notin \Phi$.*

(3) *Условиями (1) и (2) множество A_1 и функция f определены однозначно.*

Доказательство единственности. Пусть условиям (1) и (3) удовлетворяют (A_1, f) и (B_1, g) и, для определенности, $A_1 \subseteq B_1$. Тогда $f = g$ на A_1, ибо в первой же точке $a' \in A_1$, где $f(a') \neq g(a')$, было бы

$$f(a') = F(f, a') = F(g, a') = g(a').$$

Далее, при $A_1 \subset B_1$ будет $A_1 = A_1[a^0]$, $a^0 \in B_1$ и

$$\Phi \not\ni (f, a^0) = (g, a^0) \in \Phi,$$

что невозможно. Следовательно, $A_1 = B_1$, $f = g$ и единственность доказана.

Доказательство существования. Пусть X_1 содержит множество значений $F(\varphi, a)$ для

$(\varphi, a) \in \Phi$, множество значений $\varphi(\alpha)$ для $\alpha < a$ при $(\varphi, a) \in \Phi$ и еще один элемент p. Через $\Phi_1 = \{(\varphi, a)\}$ обозначим множество всех (φ, a), определенных на $A\,[a]$ и принимающих значения из X_1. Ясно, что $\Phi \subseteq \Phi_1$. Продолжим F на Φ_1 функцией F_1, полагая

$$F_1(\varphi, a) = p \text{ для } \Phi_1 \ni (\varphi, a) \notin \Phi.$$

Полученные F_1 и Φ_1 удовлетворяют условиям для построения по индукции и определяют на A функцию f_1, у которой

$$(f_1, a) \in \Phi_1 \text{ и } f_1(a) = F_1(f_1, a) \text{ для каждого } a \in A.$$

Положим $A_1 = A$, если f_1 не принимает значения p, и $A_1 = A\,[a^0]$, если a^0 — первый элемент, на котором $f(a^0) = p$. Обозначая через f сужение f_1 на A_1, имеем

$$f_1(a) = F_1(f_1, a) \neq p \text{ при } a \in A_1,$$
$$(f, a) \in \Phi \text{ и } f(a) = F(f, a) \text{ при } a \in A_1.$$

В случае $A_1 = A\,[a^0]$ будет $f_1(a^0) = F_1(f_1, a^0) = p$ и, значит, $(f, a^0) = (f_1, a^0) \notin \Phi$.

Упражнение. Докажите непосредственно теорему о построении по неполной индукции и получите из нее теорему построения по индукции.

§ 6. Постулат выбора и теорема о полном упорядочении

1. Постулат выбора. *Пусть $\mathcal{A} = \{A\}$ — семейство непустых неналегающих множеств $A = \{a\}$. Тогда существует множество B, содержащее из каждого $A \in \mathcal{A}$ точно по одному элементу* (Э. Цермело).

Этот постулат нельзя ни доказать, ни опровергнуть, пользуясь остальными положениями теории множеств. И теоремы, доказанные с его помощью, нельзя опровергнуть. Здесь и далее в этом параграфе мы будем пользоваться постулатом выбора.

2. Пусть $I = \{i\}$ *произвольно и каждому i соответствует множество A_i (так что A_i могут налегать и даже совпадать). Тогда на I существует функция $\varphi(i) \in A_i$.*

После доказательства этого утверждения мы будем на него ссылаться, как на постулат выбора (хотя по форме это утверждение и несколько шире первоначальной формулировки постулата).

П о я с н е н и е. Пусть $\mathscr{A} = \{A\}$ — некое множество непересекающихся интервалов A. Тогда выбор может быть осуществлен и без постулата Цермело — можно выбрать центры интервалов A.

Но пусть $\mathscr{A} = \{A\}$ и каждое A состоит из всех точек прямой, чьи (попарные) расстояния рациональны. Тогда мы не умеем задать правило выбора, и для построения B нужно воспользоваться постулатом Цермело.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для построения φ образуем стандартные заменители

$$A_i' = \{(i, a_i)\}$$

множеств A_i. Применив к A_i' постулат выбора, получим на I функцию $\psi(i) \in A_i$ и положим

$$\varphi(i) = a, \text{ коль скоро } \psi(i) = (i, a).$$

3. Т е о р е м а (Э. Цермело). *Каждое множество можно вполне упорядочить.*

П о я с н е н и е. Пусть $M = \{m\}$ — заданное множество. Пусть $\mathscr{P} = \{P\}$ — множество из всевозможных наборов $P = \{m', m''\}$ пар (m', m'') элементов m', m'' множества M.

Зафиксируем $P \in \mathscr{P}$. Если P удовлетворяет условиям упорядочения (напомним их: (1) при любом m пара $(m, m) \notin P$; (2) если m' и m'' — различные элементы M, то одна и только одна из пар (m', m'') или (m'', m') входит в P; (3) если $(m', m'') \in P$ и $(m'', m''') \in P$, то $(m', m''') \in P$), то P дает возможность упорядочить M (полагая $m' < m''$ при $(m', m'') \in P$). Если при этом M окажется вполне упорядоченным, то говорят, что P вполне упорядочивает M.

Таким образом, с наивной канторовской точки зрения множество M можно вполне упорядочить, если во множестве $\mathscr{P} = \{P\}$ существует элемент P, обладающий (вполне определенными) свойствами, и нельзя — если такого элемента нет. И тем не менее без постулата выбора невозможно решить, существует или нет в $\mathscr{P}$ такой элемент P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M = \{m\}$ — заданное множество. Пользуясь постулатом выбора, отметим в каждом его непустом подмножестве $\mu \subseteq M$ элемент $m = f(\mu)$. Рассмотрим систему $\mathscr{A} = \{A\}$ тех непустых $A \subseteq M$, которые можно вполне упорядочить. По теореме о верхней грани (см. § 3) существует вполне упорядоченное B длины $\|B\| \geqslant \|A\|$ любого $A \in \mathscr{A}$.

Определим в $B = \{b\}$ функцию $g(b) \in M$, полагая по индукции

$$g(b) = f(M \setminus \{g(b') \colon b' < b\}),$$

когда аргумент у $f(\ )$ не пуст. Условия построения по неполной индукции выполнены. Функция g определена на C, являющемся каким-нибудь отрезком множества B или всем B. Значения $g(b)$ на C попарно различны: если $b^0 < b \in C$, то

$$g(b) \in (M \setminus \{g(b'):\ b' < b\}) \not\ni g(b^0).$$

Множество $G = \{g(b):\ b \in C\}$ является подмножеством M и вполне упорядочивается в порядке своих аргументов b в B. Таким образом, $G \in \mathcal{A}$.

Возможны два случая $\|G\| = \|B\|$ и $\|G\| < \|B\|$. Если $\|G\| = \|B\|$, то G — самое длинное множество в $\mathcal{A}$. Но если $G \subset M$, то множество G можно удлинить элементом $f(M \setminus G)$. Следовательно, при $\|G\| = \|B\|$ должно быть $G = M$.

Если же $\|G\| = \|B\ [b^0]\|$, то построение $g(b)$ оборвалось на элементе $b = b^0$, при котором

$$M \setminus \{g(b') : b' < b^0\} = \theta \text{ и } G = M.$$

В обоих случаях $G = M$ и множество G представляет собой вполне упорядоченное множество M.

З а м е ч а н и я. (1) В изложенном доказательстве теоремы Цермело использовались значения $f(\mu)$ не на всех $\theta \subset \mu \subseteq M$, а лишь на остатках $\mu = M \setminus M\ [m]$. Таким образом, выбор $f(\mu)$ был проведен на множестве большей мощности, чем это оказалось нужно, после того как теорема была доказана $(|\{\mu\}| = |2^M| > |M| = |\{M \setminus M\ [m]\}|)$. (2) Если применить изложенное доказательство теоремы Цермело к вполне упорядоченному M, отметив в каждом его подмножестве первый элемент, то множество M будет упорядочено в исходном порядке.

§ 7. Приложения постулата выбора

С помощью постулата выбора доказаны некоторые теоремы, которые без него доказать не удалось. Рассмотрим несколько примеров применения теоремы Цермело.

1) Всякие два множества сравнимы по мощности,

2) Для каждого множества A найдется множество B, мощность которого непосредственно следует за мощностью A.

Для доказательства 1) и 2) достаточно вполне упорядочить заданные множества и применить соответствующую теорему о вполне упорядоченных множествах.

3) Каждое множество можно вполне упорядочить кратчайшим образом.

Действительно, заданное $A = \{a\}$ можно как-нибудь вполне упорядочить. Если каждый его отрезок будет иметь мощность, меньшую мощности A, то искомое множество получено. В противном случае надлежит рассмотреть первый элемент a, чей отрезок $A\,[a]$ имеет мощность множества A. Заметим, что (в случае бесконечного A) множество, упорядоченное кратчайшим образом, не имеет последнего элемента.

4) Пусть A вполне упорядочено и A_ω состоит из тех элементов A, которые не имеют непосредственно предшествующих (в частности, первый элемент из A входит в A_ω).

Рассмотрим произвольный элемент $a_\omega \in A_\omega$ и следующий за ним элемент $b_\omega \in A_\omega$ (если a_ω не последний в A_ω). Тогда

$$\|\{a_\omega \leqslant a < b_\omega\}\| = \|\omega\|.$$

Если же a_ω — последний элемент A_ω, но в A нет последнего элемента, то и

$$\|\{a_\omega \leqslant a\}\| = \|\omega\|.$$

Следовательно, если A вполне упорядочено и не имеет последнего элемента, то

$$|A| = |A_\omega \times \omega|.$$

5) Если A бесконечно, то

$$|A| = |A + A| = |A \times n| = |A \times \omega|.$$

Действительно, вполне упорядочим A кратчайшим образом и образуем A_ω из 4). Тогда $|A| = |A_\omega \times \omega|$ и

$$|A \times \omega| = |A_\omega \times \omega \times \omega| = |A_\omega \times \omega| = |A|.$$

6) Если A и A_ω — множества из 4) и A_ω бесконечно, то $|A| = |A_\omega|$. Действительно, применяя 5) к A_ω, получаем

$$|A| = |A_\omega \times \omega| = |A_\omega|.$$

7) Если A бесконечно, то $|A| = |A^2| = |A^n|$.

Доказательство. Легко видеть, что всегда $|A| \leqslant |A \times A|$. Пусть, вопреки доказываемому, $|A| < |A \times A|$. Вполне упорядочим A и заменим самым коротким из его бесконечных отрезков, у которого мощность не равна мощности квадрата (если у A есть такие отрезки). Таким образом,

$$|A| < |A \times A|,$$
$$|A[a]| = |A[a] \times A[a]|$$

для любого бесконечного $A[a]$ отрезка множества A.

Заметим для дальнейшего, что в A нет последнего элемента. Иначе, в предположении, что a' — последний, получим

$$|A| = |A[a']|,$$
$$|A^2| = |(A[a'])^2| = |A[a']| = |A|.$$

Введем обозначения: $A = \{a, b, c, \ldots\}$ и $P = A \times A$ для множества всех пар из элементов A. Множество P представим объединением неналегающих множеств:

$$P = \bigcup_{c \in A} P_c, \text{ где } (a, b) \in P_c, \text{ когда } \max(a, b) = c.$$

Упорядочим P. Для этого расположим P_c в порядке возрастания c. А внутри одного P_c:

$$P_c = \{(c, c)\} \cup \{(a, c)\colon a < c\} \cup \{(c, b)\colon b < c\},$$

вначале поместим пару (c, c). Затем расположим пары (a, c) в порядке возрастания a, наконец (c, b) — в порядке возрастания b. Тем самым P будет вполне упорядочено.

Сравним длины A и P. Если A отобразится на отрезок $P[(a, b)]$, то возьмем в A элемент c, превосходящий a и b. Тогда получится

$$\|A\| = \|P[(a, b)]\|, \qquad P[(a, b)] \subseteq P[(c, c)] = A[c] \times A[c],$$

откуда

$$|A| \leqslant |A[c] \times A[c]| = |A[c]| < |A|,$$

что невозможно. Если же $\|A\| = \|P\|$, то $|A| = |P| = |A \times A|$, вопреки выбору A.

8) Существует множество A без совершенных подмножеств, но пересекающееся с каждым совершенным множеством. Легко видеть, что A и его дополнение B неизмеримы и на каждом интервале l

$$\overline{\mu}(lA) = \overline{\mu}(lB) = \mu l.$$

Доказательство. Пусть $M = \{P\}$ — множество всех совершенных множеств P. Очевидно, M континуально. Вполне упорядочим M кратчайшим образом и вполне упорядочим P *). В каждом P выберем пару точек a_P, b_P следующим образом:

Если a_Q, b_Q выбраны в каждом $Q < P$, то точек выбрано $2 \times M\,[P]$ — меньше континуума. В P есть еще не выбранные точки. Первую из них обозначим a_P, вторую — b_P.

Множество $A = \{a_P\}$ континуально, но не содержит ни одного совершенного P, ибо $b_P \in P$, $b_P \notin A$.

9) Существуют две (счетные) последовательности однозначных функций

$$y = f_i(x), \quad x = g_i(x),$$

графики которых покрывают всю плоскость.

10) Самым удивительным (но трудным) является следующий результат.

Сферу трехмерного пространства

$$S = \{(x,\ y,\ z)\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

можно так разбить на четыре неналегающих множества

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4,$$

что, двигая их в пространстве, как твердые тела, можно будет из S_1 и S_2 сложить одну сферу, а из S_3 и S_4 — другую, исходного (разумеется) радиуса.

Если в этом примере каждую точку сферы дополнить радиусом (идущим из этой точки), то получится способ разбиения шара (с выколотым центром), на четыре части, из которых можно будет сложить два шара, таких же, как исходный.

---

*) Достаточно вполне упорядочить множество D действительных чисел, тогда каждое P станет вполне упорядоченным, как подмножество D.

11) Существует аддитивная нелинейная функция одного действительного переменного:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad f(x)\not\equiv cx.$$

12) Существует множество, неизмеримое по Лебегу.

Доказательство. Действительные числа $-1\leqslant \leqslant x\leqslant 1$ разобьем на взаимно рациональные классы: x' и x'' входят в один класс, когда $x'-x''$ рационально. Поскольку отношение «$x'-x''$ рационально» обладает свойствами эквивалентности, то это разбиение определено и дает непересекающиеся классы. Образуем множество E, выбрав из каждого класса по одной точке. Если x' и x'' входят в E, то $x'-x''$ иррационально: иначе x' и x'' вошли бы в общий класс и не могли быть оба выбраны в E.

Пронумеруем все рациональные точки $r_1, r_2, \ldots$ отрезка $[-2, +2]$ и обозначим через E_n множество чисел x_n вида $x_n=r_n+x$, где $x\in E$.

Множества E_n не налегают, ибо в случае $y\in E_m$, $y\in E_n$ будет

$$y=x'+r_m=x''+r_n$$

и разность

$$x'-x''=r_n-r_m\neq 0$$

двух чисел x' и x'' из E окажется рациональной. Далее,

$$[-1,+1]\subseteq\bigcup_1^\infty E_n\subseteq[-3,+3].$$

Действительно, если $|x|\leqslant 1$, то x входит в некоторый класс рациональности и найдется такая точка $x'\in E$, что $x-x'=r_n$ рационально, причем $|r_n|<2$. Тогда $x=x'+r_n\in E$. С другой стороны, для любого $x_n\in \in E_n$ будет

$$|x_n|=|x'+r_n|<3$$

и, значит,

$$x_n\in[-3,\ +3].$$

Множества E_n конгруэнтны и, если измеримы, имеют одинаковую меру Лебега $\mu E_n\equiv\lambda$.

Если $\lambda = 0$, то

$$\mu[-1, +1] \leqslant \sum \mu E_n = 0.$$

Если же $\lambda > 0$, то

$$\mu[-3, +3] \geqslant \sum \mu E_n = \infty.$$

И то и другое невозможно. Значит, любое E_n — и в частности E — неизмеримо.

§ 8. Натуральный ряд

Сейчас мы изложим аксиомы натурального ряда и построим арифметику. Сделано это будет способом простым и естественным для наивной канторовской теории множеств. Но вряд ли это изложение обрадует алгебраиста или логиста.

Аксиома. *Натуральный ряд — это (непустое) вполне упорядоченное множество без последнего элемента, в котором каждый элемент (кроме первого) имеет непосредственно предшествующий.*

1. Мы далеки от доказательства существования натуральных рядов. Примем, что хотя бы один существует. Зато легко доказать, что *все натуральные ряды подобны*. Иначе найдутся два ряда $M = \{m\}$ и $N = \{n\}$, для которых $\|M\| = \|N[n]\|$. Множество $N[n]$ либо пусто, либо имеет последний элемент (непосредственно предшествующий элементу n). Но тогда M тоже пусто или имеет последний элемент, вопреки определению натурального ряда.

Закрепим обозначение $\omega = \{n\}$ для некоторого натурального ряда и обозначения n^- — для элемента, непосредственно предшествующего элементу n, и 1 — для первого элемента из ω.

Для натурального ряда выполняется постулат (простой) индукции (5-й постулат Пеано):
если

(1) $\qquad 1 \in A,$

(2) $\qquad$ *при любом* $n > 1$

из условия $n^- \in A$ *следует, что* $n \in A$,

то $\omega \subseteq A$.

Действительно, пусть n — первый элемент ω, не входящий в A. Тогда $n \neq 1$, $n^- \in A$ и, значит, $n \in A$, вопреки выбору этого n.

Каждое непустое подмножество $A \subseteq \omega\,[n]$ *имеет последний элемент.* Иначе найдется первый отрезок $\omega\,[n]$ с подмножеством A без последнего элемента. Если $A \ni n^-$, то n^- — последний элемент в A. Если же $A \not\ni n^-$, то $A \subseteq \omega\,[n^-]$. И тогда $\omega\,[n]$ — не первый отрезок с рассматриваемым свойством.

Натуральный ряд равномощен некоторым своим строгим подмножеством, например, множеству $\omega \setminus \{1\}$. Нужное отображение доставляет функция $f(n) = n^+$, где n^+ непосредственно следует за n.

В противоположность этому: *отрезок* $\omega\,[n]$ *натурального ряда не бывает равномощен своему строгому подмножеству.* Иначе найдется первый отрезок $N = \omega\,[n]$, эквивалентный своему строгому подмножеству $M \subset N$. Ясно, что N и M — оба не пусты. Пусть f отображает взаимно однозначно N на M, а n^- и m^- — их последние элементы. Удалим из N и M элементы n^- и m^-. Если $f(n^-) = m^-$, то $\omega\,[n^-]$ равномощно $M \setminus \{m^-\}$. Если же $f(n^-) \neq m^-$, то отобразим $f^{-1}(m^-)$ на $f(n^-)$, а остальные элементы $\omega\,[n^-]$ и $M \setminus \{m^-\}$ оставим в старом соответствии. В результате и в этом случае $\omega\,[n^-]$ оказывается равномощен своему строгому подмножеству

$$M \setminus \{m^-\} \subset \omega\,[n^-]$$

и $\omega\,[n]$ — не первый отрезок с таким свойством.

Но верно и обратное. *Если A не равномощно никакому своему строгому подмножеству, то A равномощно некоторому отрезку* $\omega\,[n]$.

Для доказательства проще всего вполне упорядочить A и сравнить длины A и ω. Если

$$\|\omega\| \leqslant \|A\|,$$

то в A уже есть подмножество (образов ω), равномощное своей строгой части. Значит,

$$\|\omega\| > \|A\| \quad \text{и} \quad \|A\| = \|\omega\,[n]\|.$$

При доказательстве этого утверждения не удается избегнуть постулата выбора.

З а м е ч а н и е. $\|\{i > n\}\| = \|\omega\|$ *для любого* $n \in \omega$.

Действительно, пусть N состоит из тех n, для которых это верно. Мы видели, что $1 \in N$. Пусть $n \in N$. Тогда

$$\|\{i > n\}\| = \|\omega\|,\ \|\{i > n^+\}\| = \|\{i > 1\}\| = \|\omega\|$$

и $n^+ \in N$. Следовательно, $N = \omega$, и утверждение доказано.

2. Построение арифметики также не вызывает затруднений. Но чтобы не повторяться, мы изложим его так, будто § «Арифметика мощностей» находится у читателя под руками. Кроме того, закрепим обозначение $\bar{A}\,[a]$ за закрытым отрезком

$$\bar{A}\,[a] = \{\alpha\colon \alpha \leqslant a\}.$$

Пусть i, j, n_j — элементы ω. *Суммой и произведением*

$$s = \sum_{j=1}^{i} n_j \quad \text{и} \quad d = \prod_{j=1}^{i} n_j$$

называются такие s **и** d **из** ω, **что**

$$|\bar{\omega}\,[s]| = \Big|\sum_{j\leqslant i} \bar{\omega}\,[n_j]\Big|$$

и

$$|\bar{\omega}\,[d]| = \Big|\prod_{j\leqslant i} \bar{\omega}\,[n_j]\Big|.$$

Поэтому сложение и умножение коммутативны и ассоциативны, а сложение дистрибутивно относительно умножения. Все это уже было установлено для сложения и умножения мощностей. *Возведение в степень тоже обладает обычными свойствами.*

Остается доказать лишь существование нужных s и d.

С л о ж е н и е. Докажем существование суммы s двух слагаемых $m + n$. Образуем три неналегающих заменителя натурального ряда:

$$\omega,\ \omega_1 = \{(1,\ k)\},\ \ \omega_2 = \{(2,\ k)\}.$$

Отобразим $\bar{\omega}_1\,[(1,\ m)]$ на $\bar{\omega}\,[m]$. По предыдущему замечанию, остаток $\{k\colon k > m\}$ подобен ω и ω_2. Поэтому $\omega_2\,[(2,\ n)]$ подобно некоторому отрезку $\{m < k \leqslant s\}$ множества $\{k > m\}$. А все объединение

$$\bar{\omega}_1\,[(1, m)] \cup \omega_2\,[(2, n)] \text{ подобно } \bar{\omega}\,[s].$$

Далее, при любом $i > 1$, благодаря ассоциативности сложения мощностей, получаем

$$\left|\sum_{j\leqslant i^+} \overline{\omega}[n_j]\right| = \left|\left(\sum_{j\leqslant i} \overline{\omega}[n_j]\right) + \overline{\omega}[n_{i^+}]\right|.$$

И если существует s для i слагаемых, то существует и s для i^+ слагаемых. Тем самым нужное s существует для любого числа $i \in \omega$ слагаемых.

Умножение. Произведение $d = m \times n$ двух сомножителей существует, так как сводится к сумме m слагаемых:

$$|m \times n| = |\overline{\omega}[m] \times \overline{\omega}[n]| = \left|\sum_{j\leqslant m} \overline{\omega}[n_j]\right|,$$

в которой все $n_j = n$. Произведение i^+ сомножителей существует вслед за произведением i сомножителей благодаря ассоциативности произведения мощностей.

Замечание 1. По-видимому, у нас есть возможность выбрать один натуральный ряд и описать его собеседнику. Определение этого ряда:

$$\{\theta\};\ \{\theta,\{\theta\}\};\ \{\theta,\{\theta\},\ \{\theta,\{\theta\}\}\};\ \ldots \qquad (*)$$

опирается на единственность пустого множества. Вот оно:

Пусть ω — (какой-нибудь) натуральный ряд и $\varphi(n)$ — (какая угодно) функция на ω. Положим $F(\varphi,\ n_1) = \{\theta\}$ для первого элемента $n_1 \in \omega$ и

$$F(\varphi, n) = \{\theta, \varphi(n^-) \text{ для } n > n_1.$$

Условия для построения по индукции выполнены. Тем самым определена и единственна на ω функция

$$f(n) = \{\theta,\ f(n^-)\},$$

значения которой образуют ряд (*).

Другой, менее надежный, но полезный для практики способ состоит в рассмотрении десятичных (целых положительных) чисел. Каждое такое число является отображением φ_n отрезка $\overline{\omega}[n]$ во множестве десятичных цифр 0, ..., 9, начинающимся не с нуля ($\varphi_n(n_1) \neq 0$). Доказательство подобия $\|\{\varphi_n\}\| = \|\omega\|$ предоставляется читателю.

З а м е ч а н и е 2. Если множество $I = \{i\}$ и все A_i вполне упорядочены, то легко вполне упорядочить сумму $S = \Sigma A_i$.

Действительно, коль скоро s и t — элементы S и $s \in A_i^*$, $t \in A_j^*$, то положим $s < t$, когда

$$i < j \text{ в } I,$$

или

$$i = j \text{ и } s < t \text{ в } A_i.$$

Легко видеть, что S станет вполне упорядочено.

Но произведение $D = \Pi A_i$ так просто вполне упорядочить не удается. Иначе мы смогли бы вполне упорядочить континуум 2^ω, не пользуясь постулатом выбора.

Александр Львович Брудно
Теория функций действительного переменного
М., 1971 г., 120 стр. с илл.

Редакторы: *И. М. Овчинникова*, *Г. Я. Пирогова*.

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *З. В. Автонеева*, *Т. А. Панькова*

Сдано в набор 13/VI 1971 г.
Подписано к печати 25/X 1971 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$
Физ. печ. л. 3,75. Условн. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 6,08.
Тираж 21000 экз. Т-16338. Цена книги 39 коп. Заказ 2691.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Шубинский пер., 10

Цена 39 коп.